Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2008

Exercice 1

1. Dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

   (a) Représenter sur l'axe des abscisses du repère les termes : $u_1,\ u_2,\ u_3$.

   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n < 2$.

   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

   (c) En déduire la limite u_n quand n tend vers $+\infty$.

4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombre complexes $\mathbb{C}$ les équations:

   $(E_1): z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$ et $(E_2) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation$(E): P(z) = 0$.

   (a)Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que

   $P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$.

   (b)En déduire les solutions de l'équation (E).

3. Soit A, B, C, D, E et F les points d'affixes respectives$\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$;$\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   (a) Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

(b) Placer ces points dans le plan.

(c) Montrer que $ABCDEF$ est un hexagone régulier.

Problème

Partie A

Soit la fonction v définie sur$]0;\ +\infty[$ par $v(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$.

1. Montrer que, pour tout x supérieur ou égal à 1, $\frac{\ln x}{x^2} \leq v(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.
2. Calculer $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$ et $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$.

   On remarquera que $\frac{\ln x}{x^2} = (\ln x) \times \frac{1}{x^2}$.
3. En déduire l'encadrement de $K = \int_1^{\frac{3}{2}} v(x)dx$.

Partie B :

f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f\ (x) = x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. **Unité sur les axes : 2 cm.**

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) - (x-1) = \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

   (b) Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives : $y = x-1$ et $y = x+1$ sont asymptotes à la courbe (C_f).

   (c) Tracer les droites (D) et (D') et la courbe (C_f) dans le même repère orthonormé.
3. (a) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ une réciproque f^{-1} dont on donnera le tableau de variation.

   (b) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère que (C_f).
4. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 :

   $\mathcal{A}(a)$ désigne l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (D) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

   (a) Calculer $\mathcal{A}(a)$ et préciser $\mathcal{A}(2)$ à 10^{-2} près.

   (b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.