Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2007

Exercice1

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère le polynôme complexe P défini par :

$P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 20$.

1. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1+i$; $1-i$; $3+i$ et $1+3i$.
   (a) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D.
   (b) Montrer que les affixes respectives de ces points sont solutions de l'équation $P(z) = 0$.
   (c) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
2. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout Point M d'affixe z associe M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$.
   (a)Déterminer l'affixe du point Ω tel que $h(\Omega) = \Omega$.
   (b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de h.
   (c) r est la rotation de centre Ω et d'angle $15°$.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S = h \circ r$.

Exercice2

1. Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y' \ln 2 = 0$.
2. On considère la fonction numérique d'une variable réelle t définie par :
   $u(t) = e^{-t \ln 2}$.
   Déterminer la primitive de u qui prend la valeur 1 en 0.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :
   $v_n = \int_{n-1}^{n} u(t)dt$ et on pose $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Calculer S_n et déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire g.

Soit la fonction g définie sur$]0;\ +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2\ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = 1$.

Partie B : Étude de la fonction$f$.

Soit la fonction$f$définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln x$, C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Étudier la variation de f.

(b) Montrer que la courbe C_f admet une branche parabolique.

(c) Montrer que la courbe C_f coupe la droite (Δ) d'équation cartésienne: $y = \frac{1}{2}x$ en un point unique A dont on déterminera les coordonnées.

(d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

(e) Montrer que $0{,}83 < \alpha < 0{,}84$.

2. (a) Écrire une équation cartésienne de la tangent (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

(b) Tracer les droites (Δ), (T) et la courbe C_f dans le même repère.

3. Γ est le domaine du plan limité par la courbe C_f, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \lambda$, avec $\lambda > 1$.

(a) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de Γ.

(b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\lambda.)$ quand λ tend vers $+\infty$.