Mathématiques

Baccalauréat série D Session 2005

Exercice 1

On considère les intégrales :

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x \, dx$

1. Calculer $I + J$.
2. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{4} e^{2x}(\cos 2x + \sin 2x)$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
   (b) En déduire $I - J$.
3. Calculer I et J.

Exercice 2

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation t de P dans P qui a tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

1. (a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   (b) Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation t.
2. Soit la transformation r, qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que :
   $z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}.}{2}\right)$z. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r.
3. Soit la transformation $s = r \circ t$ qui, au point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M_2(x_2, y_2)$ d'affixe z_2.
   (a) Exprimer z_2 en fonction de z.
   (b) Déterminer les coordonnées de l'image C' du point $C(1; -\sqrt{3})$ par s.
4. Soit la droite (D) dont une équation est $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$.
   (a) Montrer que le point C appartient à (D).
   (b) Soit (D') l'image (D) de par s.

Déterminer le point d'intersection de (D) et (D').

Problème

Le problème comporte deux parties A et B indépendantes.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

1. Montrer que f est une fonction impaire et étudier les variations sur $\mathbb{R}^*$.
2. Soit C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
   (a) Déterminer les branches infinies de la courbe C_f de f.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Tracer la courbe C_f.
3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.
   (a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $g(x) = f(x-1) + 2$.
   (b) En déduire que le point I de coordonnées $(1; 2)$ est centre de symétrie de la courbe C_g représentative de g.
4. Sans étudier la fonction g. Construire C_g dans le même repère.
   On précisera les asymptotes de la courbes C_g.
5. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe C_g. les droites d'équations respectives $x = 2$; $x = a$ et $y = x + 1$ où a est un réel supérieur à 2.

Partie B

Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{2e^x+2x-2}{e^x}$. On désigne par (Γ) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé. (Unité sur les axes : 2 cm).

1. (a) Montrer que l'on peut écrire $h(x)$ sous la forme $2 + \varphi(x)$ où φ est une fonction que l'on déterminera.
   (b) Montrer que la limite de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.
   (c) Étudier les variations de h et calculer $h(0)$.
2. (a) Montrer que la courbe (Γ) coupe son asymptote en un point I dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Écrire une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 0.
   (c) Tracer la courbe (Γ).

3. Soit (D_m) la droite d'équation $y = -m$, m étant un réel.

   (a) Tracer (D_1) et (D_{-2}).

   (b) Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation E_m : $(2+m)e^x + 2x - 2 = 0$.