Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2007

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- Le plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$;
- La droite (D) passant par le point $A(1;2;3)$ et le vecteur directeur $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$:
- La symétrie orthogonale s par rapport au plan (P).

1. Démontrer que (D) et (P) sont perpendiculaires.
2. (a) On note $M(x,y,z)$ un point quelconque de l'espace et $M'(x',y',z')$ son image par s.
   Écrire x', y' et z' en fonction de x, y et z.
   (b) On note $A'=s(A)$, déterminer les coordonnées de A' dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
   (c) En déduire les coordonnées du point H, intersection de (P) et (D).
   (d) Retrouver les coordonnées de H par une autre méthode.
3. (a) Déterminer par son équation cartésienne l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que : $\frac{MA}{MH}=\sqrt{5}$.
   (b) Reconnaitre (S) et déterminer ses éléments caractéristiques.
   (c) Préciser l'intersection de (S) et de (P).

Exercice 2 :

Pout tout n de $\mathbb{N}$ et x de $\mathbb{R}$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{1+e^x}$.

On définie la suite (u_n) par son terme général $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est définie et à termes positifs.
   (b) Calculer u_1 et u_0+u_1. En déduire la valeur exacte de u_0.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, caculer u_n+u_{n+1} en fonction de n.
2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, et pour tout x de l'intervalle $[0;1]$, $\frac{e^{nx}}{e+1}\leq f_n(x)\leq\frac{1}{2}e^{nx}$.

(c) En déduire un encadrement de u_n.

3. Déduire de la question 2.b), la limite de u_n ; puis celle de $\frac{u_n}{e^n}$.

Problème :

Partie A

Le plan est rapporté à un repère $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On note (Γ) l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation : $5z\overline{z} + (z + \overline{z} + 1)^2 - 1 = 0$; f la similitude directe plane d'angle $\frac{\pi}{2}$, de rapport 2 et de centre O.

g l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans lui-même qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, associe le nombre $g(z)$, affixe de $f(M)$. (Γ') est l'image de (Γ) par f.

1. Démontrer que (Γ) est une ellipse et préciser ses foyers, ses directrices et son excentricité.
2. (a) Donner l'expression de $g(z)$ en fonction de z.

   (b) Donner la nature exacte de (Γ') dont on donnera l'excentricité.

Partie B

On note :

- h la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par :

  $h(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$;
- ℓ la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par $\ell(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$;

(C) la courbe représentative de ℓ dans le repère orthonormé.

1. (a) Déterminer les limites de h à la droite de 0 et en $+\infty$.

   (b) Calculer la dérivée de h et en déduire le tableau de variation de h.
2. (a) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution λ dans l'intervalle $I =]1; 2[$.

   (b) Préciser le signe de $h(x)$ dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$.
3. (a) Déterminer les limites de ℓ à droite de 0 et en $+\infty$.

   (b) En déduire les asymptotes de (C).

   (c) Calculer la dérivée de ℓ et démontrer que, pour tout x de $]0;\ +\infty[$, $\ell'(x)$ a le même signe que $(2x + 1)h(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de ℓ dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

5. (a) Démontrer que $\ell(\lambda) = \frac{2}{\lambda(2\lambda+1)}$.

   (b) On note A le point de rencontre de (C) avec l'axe des abscisses ; écrire une équation cartésienne de la droite (D), tangente à (C) en A.

   (c) Tracer (D) et donner l'allure générale de la courbe (C). Unité sur les axes 1,5 cm.