Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2009

Exercice 1 : (Série E uniquement)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points : $A(-4; 6; -1)$; $B(1; 2; 2)$; $C(-1; 4; 3)$.

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit I le milieu de $[AC]$ et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I.
   (a) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   (b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ et puis calculer son aire.

Exercice 1 : (série C uniquement)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de P^4, où P est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de P.
2. Démontrer que : $(2P^2 + P)^2 < 4S < (2P^2 + P + 2)^2$.
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$, où n est un entier naturel.
   (a) Établir l'existence de l'unicité de n lorsque P est fixé. (On pourra utiliser la question 2).
   (b) Exprimer n en fonction de P.
   (c) Établir que P vérifie la relation : $3 + 2P - P^2 = 0$ (on utilisera le fait que $4S = 4n^2$).
   (d) Déduire de (c), P et puis n.

Exercice 2 : (pour tous les candidats)

Un dé cubique est pipé tel que : deux faces sont marquées 2 ; trois faces sont marquées 4 et une face est marquée 6.

La probabilité P_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i.

1. Calculer P_2, P_4 et P_6.

2. On suppose dans la suite que $P_2 = \frac{1}{6}$; $P_4 = \frac{1}{3}$ et $P_6 = \frac{1}{2}$.

   On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer.

   On définit la variable aléatoire X qui au couple $(i; j)$ associe le nombre $i - j$.

   (a) Déterminer l'univers-image de X.

   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.

Problème : (pour tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f.

   (b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de (C_f) par rapport à sa tangente (T_0) en O.

   (c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

2. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

   (b) Soit g la bijection réciproque de f et (C_g) sa courbe représentative.

   Montrer que pour tout x de I, $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

3. Construire dans le même graphique les courbes (C_f) et (C_g).

   (On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées).

4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :

   $U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]dx$.

   (a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul,

   $U_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)\ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$.

   (b) Calculer la limite de la suite (U_n) et interpréter graphiquement le résultat.

Partie B

Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ): $y = x$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

On pose : $\varphi = T \circ S$.

(a) Donner la nature de l'application φ.

(b) Construire l'image par φ de la courbe (C_f).

On considère :

- Les vecteurs : $\overrightarrow{e_1} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\overrightarrow{e_2} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$,
- La droite (Δ') : $x - y - 1 = 0$,
- Et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ').

(a) Vérifier que le triplet $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ forme un repère orthogonal du plan.

(b) Montrer que dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, où $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ sont des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{e_1}$ et à $\overrightarrow{e_2}$ que l'on précisera.

(c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ').

Montrer que $\overrightarrow{V_2} = 2\overrightarrow{HH'}$.

En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$ où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur.

(d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$.

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit (D) la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan (P) ont pour affixes respectives z et $1 - i$.

1. Exprimer en fonction de z, la distance de M à la droite (D).
2. On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$.

   Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (E_m) suivante : $|z - 1 + i| = m|\bar{z} + z - 4|$.

   (a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m).

   (b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_m).