

Mathématiques

Baccalauréat série C

Session 2010



Exercice 1 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité d'axe : 1,5 cm).

On considère l'équation d'inconnue z ; $(E) : z^3 - 7iz^2 - 15z + 25i = 0$ définie dans $\mathbb{C}$.

- Montrer que l'équation (E) admet le nombre complexe $z_0 = 5i$ comme solution.
 - Résoudre l'équation (E) .
- On considère les points A , B et C d'affixes respectives $2 + i$; $5i$; $-2 + i$. La droite (D) d'équation $y = 2$ rencontre la droite (AB) en K et la droite (OA) en L . Γ et Γ' sont les cercles circonscrits aux triangles OAB et ALK respectivement. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en O et K en L ; soit Ω le centre de S .
 - Montrons que Ω appartient à Γ et à Γ' et qu'il est distinct de A .
 - Donner l'écriture complexe de S et en déduire l'affixe de Ω .

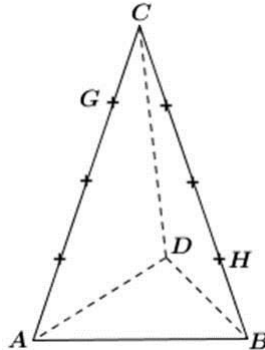
Exercice 2 :

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan. On appelle (E) la conique de foyer O de direction (Δ) , $(\Delta) : y = 2$ et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

- Montrer que (E) a pour équation $12X^2 + 9Y^2 = 16$ par rapport à un repère que l'on précisera. Quelle est la nature de (E) ?
- Soit Φ l'application qui à tout point M de coordonnées x et y associe le point M' de coordonnées x' et y' tels que :
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{2-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
 - Donner une équation cartésienne de l'image (E') de (E) par Φ .
 - Construire (E) et (E') .

Exercice 3 :

Sur la figure ci-dessous, $CABD$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux) ; G et H sont des points tels que : $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et L le milieu du segment $[CD]$.



- Montrer que les droites (GH) et (AB) sont sécantes en un point qu'on appellera I .
 $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, respectivement colinéaires et de même sens que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$. On suppose que l'espace est rapporté du repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et que $AC = 4$.
- Déterminer les coordonnées des points G, H et I dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- Soit E l'espace vectorielle associé à l'espace affine ci-dessus ; $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de E . f est l'endomorphisme de E tel que $f(\vec{i}) = \vec{j}$, $f(\vec{j}) = -2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = \vec{k}$.
 - Justifier que f n'est pas un isomorphisme de E .
 - Déterminer le noyau et l'image de f ; on donnera une base pour chacun d'eux.

Problème :

Partie A

I- Soient les équations différentielles $(E) : y' + y = 0$ et $(E') : y' + y = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 2$.

- Montrer qu'il existe une fonction h définie par $h(x) = pe^{-\frac{x}{2}} + q$ solution de (E') , p et q étant des nombres que l'on déterminera.
- Montrer qu'une fonction $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement si g est solution de (E) .
- Résoudre (E) , puis en déduire les solutions de (E') .

II- Soit la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x} - e^{-\frac{x}{2}} - 2$.

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité sur les axes : 1 cm).

1. Montrer que la fonction f vérifie l'équation (E') ci-dessus.
2. Étudier les variations de f , puis dresser son tableau de variation.
3. i. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) .
ii. Tracer la courbe (C_f) .
4. i. Calculer le réel $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\ln 4}^{\alpha} [-2 - f(x)] dx$ où α est un réel supérieur à $\ln 4$.
ii. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Partie B

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} - 2 \quad (1).$$

1. Déterminer une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par : $a_n = be^{-\frac{n}{2}} + c$ telle que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1). (b et c étant des nombres réels).
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - a_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et sa raison.
3. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Calculer S_n en fonction de n ; la suite (S_n) est-elle convergente ?