

Mathématiques

Baccalauréat série C

Session 2011



Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n , on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x \, dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que $2I_n + nJ_n = 2$ et

$$nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{2}}.$$

2. Dédurre de 1), les expressions de I_n et J_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
3. Les suites (I_n) et (J_n) sont-elles convergentes ?

Exercice 2 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1; 2; 1)$; $B(1; -6; -1)$; $C(2; 2; 2)$; $I(0; 1; -1)$.

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) contenant les points A , B et C .
2. (a) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de I sur le plan (P) .
(b) (S) est la sphère de centre I et de rayon 3 ; déterminer l'intersection du plan (P) et de la sphère (S) .

Exercice 3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. A et B sont deux points du plan tel que $AB = 6 \text{ cm}$. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, r_2^{-1} est la transformation réciproque de r_2 .

Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par r_1 et M_2 l'image du point M par r_2 .

1. On pose $f = r_1 \circ r_2^{-1}$.
(a) Montrer que f est une symétrie centrale et déterminer $f(M_2)$.
(b) En déduire que le milieu I du segment $[M_1M_2]$ est le centre de la symétrie f .

2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives -3 et $+3$; on note z , z_1 et z_2 les affixes respectifs des points M , M_1 et M_2 .
 - (a) Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z .
 - (b) Montrer que si M est distinct de A et de B , on a : $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3} \left(\frac{z-3}{z+3} \right)$.
 - (c) En déduire que : $(\overrightarrow{MM_1}; \overrightarrow{MM_2}) \equiv (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 - (d) Déterminer et construire l'ensemble (T) des points M du plan tels que M , M_1 et M_2 soient alignés.

Problème :

On considère la famille de fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$ où λ est un réel non nul : $\ln$ désigne le logarithme népérien, (C_λ) la courbe de f_λ et (D) la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A/ Recherche des points d'intersection de (C_λ) et (D) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_λ .
On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.
2. On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations.
En déduire le nombre de points d'intersection de (C_λ) et (D) .
3. (a) On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations.
Établir que la plus grande valeur prise par φ_λ quand x décrit l'ensemble de définition est $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.
(b) Étudier les variations de m sur $]0; +\infty[$; en déduire le signe de $m(\lambda)$.
(c) Déterminer le nombre de points communs à (C_λ) et (D) lorsque λ est positif.

Partie B/ Étude du cas $\lambda = 1$.

1. (a) Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithmique népérienne ; trouver une translation qui transforme (Γ) en (C_1) .
(b) Représenter graphiquement (C_1) et (D) . On prendra pour unité 3 cm sur les axes.
2. On appelle P et Q les points d'intersection de (C_1) et (D) ; P est le point d'abscisse négative p et Q est le point d'abscisse positive q .
Démontrer que $2 < q < 3$.

3. L'unité d'aire étant le cm^2 , calculer en fonction de p et q l'aire du domaine compris entre (C_1) , (D) et les droites d'équations $x = p$, $x = q$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

Partie C / Valeur approchée de q

On se propose de calculer une valeur approchée de q ; on définit la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Représenter à l'aide de la courbe (C_1) les termes u_1 et u_2 sur $(O, \vec{i})$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par q .
3. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$ pour tout entier naturel n .
4. En déduire que pour tout entier naturel n : $q - u_n \leq \frac{q - u_0}{3^n}$, et que la suite (u_n) converge vers q .
5. Déterminer une valeur approchée u_k de q à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n) .