Mathématiques

Baccalauréat série C — Session 2014

Exercice 1 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;\, -1; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(1; 2;\, -1)$ et $D(1; 0; 0)$.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. (a) Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).

   (b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

   (c) Déterminer l'expression analytique de la réflexion f par rapport au plan (ABC).
3. Soit (S) la sphère de centre D passant par B. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image (S') de (S) par f.

Exercice 2 :

1. On considère les équations différentielles suivantes :

$$y'' - 4y' + 4y = 2\cos x + \sin x, \qquad (E)$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad (E_0)$$

   (a) Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = a\cos x + b\sin x$ est solution de (E).

   (b) Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E_0).

   (c) Résoudre l'équation (E_0) et en déduire la forme générale des solutions de (E).

2. Soit la fonction h définie dans $[0;\, \pi[$ par $h(x) = \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   (a) Calculer, pour tout $\in [0;\, \pi[$, $h'(x)$ et $h''(x)$.

   (b) Étudier les variations de h' sur $[\frac{\pi}{2};\, \pi[$ et en déduire que l'équation $h'(x) = 0$ dans $[\frac{\pi}{2};\, \pi[$ admet une unique solution α, avec $2{,}6 < \alpha < 2{,}7$.

   (c) Montrer que $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\alpha;\, \pi[$ et dresser le tableau de variation de h.

   (d) Tracer (C) (prendre $\alpha = 2{,}6$ et pour unité de longueur sur les axes, 1,5 cm).

Exercice 3 :

1. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Montrer que $1 - a < \frac{1}{1+a} < 1$.

   (b) Déduire que $a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$.

2. Soit n un entier naturel non nul ; on pose

$$P_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

   (a) Justifier que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) Montrer que $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln P_n < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

   (c) Déduire que la suite (P_n) converge et déterminer sa limite.

Problème : Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère l'application ψ définie par ; $\psi(O) = O$ et, pour tout point $M \in (P)$ tel que $M \neq O$, $\psi(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

Partie A :

1. (a) Montrer que, pour tout point $M \in (P)$, $\psi \circ \psi(M) = M$.

   (b) Justifier que l'ensemble des points $M \in (P)$ distincts de O tels que $\psi(M) = M$ est le cercle de centre O et de rayon 2.

Pour toute la suite, (d) est une droite quelconque de (P), D est un point fixé de (d) distinct de O ; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d). On pose $\vec{e_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On donne $\overrightarrow{OD} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2}$.

2. Justifier que (d) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z = a + it$, où $t \in \mathbb{R}$.
3. Soient M et M' deux points de (P) tous distincts de O et d'affixes respectifs z et z'.

   (a) Montrer que $\psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\bar{z}}$.

   (b) En posant $\overrightarrow{OM} = a\vec{e_1} + t\vec{e_2}$ et $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2}$. Montrer que :

   $\psi(M) = M' \Leftrightarrow x' = \frac{4a}{a^2+t^2}$ et $y' = \frac{4t}{a^2+t^2}$.

   (c) Vérifier que dans ce cas, $\left(x' - \frac{2}{a}\right)^2 + y'^2 = \frac{4}{a^2}$.

   (d) Déduire que si M appartient à (d), alors $\psi(M)$ appartient au cercle (C_1) de diamètre $[OH']$, où H' est l'image par ψ du projeté orthogonal H de O sur (d).

4. Soit h l'application affine qui, à tout point $M(x; y)$, associe le point $M_1(x_1;\ y_1)$ tel que $x_1 = x$ et $y_1 = \frac{2}{3}y$. Montrer que l'image de (C_1) par h est une ellipse dont on donnera l'excentricité.

Partie B : Dans le plan vectoriel $\vec{P}$ associé à (P), on considère l'application φ telle que $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\varphi(\vec{u}) = \frac{4}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$.

1. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul ; exprimer $\varphi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)$ en fonction de $\vec{v}$ et en déduire que φ n'est pas une application linéaire.
2. (a) Déterminer l'ensemble $inv(\varphi)$ des vecteurs $\vec{u}$ de $(\vec{P})$ tels que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$.

   (b) Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de $\vec{P}$ tels que $\|\overrightarrow{u_1}\| = \|\overrightarrow{u_2}\| = 2$ et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}}\right) = \frac{\pi}{3}$

   Calculer $\|\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\|$ et en déduire que $inv(\varphi)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\vec{P}$.
3. Soit $opp(\varphi)$ l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de $\vec{P}$ tels que $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$.

   Déterminer $opp(\varphi)$ et montrer que $opp(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{P}$.