Mathématiques

Baccalauréat série C   Session 2015

Exercice 1 :

Soit à résoudre le système : $\begin{cases} x = \sqrt{2y+3} \\ y = \sqrt{2z+3} \\ z = \sqrt{2x+3} \end{cases}$ où $x,\ y$ et z sont des nombres réels.

1. Première approche : **série E uniquement**
   a) Montrer que le triplet $(3, 3, 3)$ est une solution de ce système.
   b) Montrer que si le triplet (x, y, z) est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x < 3$.
   c) Montrer que si le triplet (x, y, z) est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x > 3$.
   d) Déduire alors l'ensemble solution de ce système.
2. Deuxième approche : **série C uniquement**
   a) Montrer que si le triplet (x, y, z) est solution de ce système, alors x, y et z sont solutions de l'équation :
   $$t^8 - 12t^6 + 30t^4 + 36t^2 - 128t - 183 = 0.$$
   b) En déduite les valeurs rationnelles de $x,\ y$ et z.

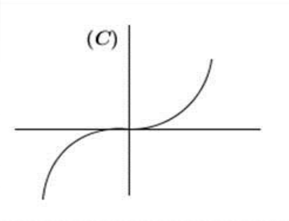
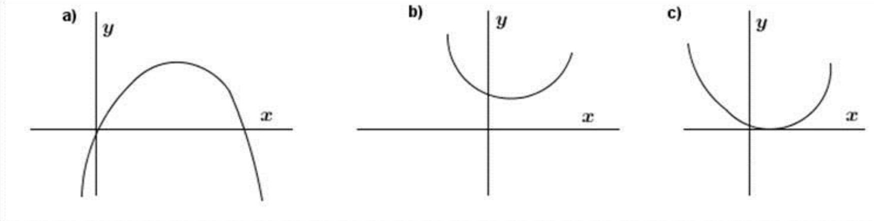
Exercice 2 :

(i) On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(ii) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a : $u_n \leq v_n$.

1. Compléter les phrases ci-après par le mot qui convient :
   a) Toute suite croissante et majorée est ……………………………
   b) Toute suite croissante et …………………………… est convergente.
2. Indiquer si la proposition ci-après est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée :
   « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

3. Relier en justifiant votre choix la courbe (C) de la colonne (I) à la courbe (C') de sa fonction dérivée dans la colonne (II).

Colonne (I)	Colonne (II)
	

Exercice 3 :

On désigne par $L(\mathbb{R}^2)$, la famille des endomorphismes f_λ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice M_λ relativement à la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{bmatrix} -1+\lambda & 1+\lambda \\ \lambda(1-\lambda) & \lambda \end{bmatrix}$, où λ est un réel.

1) À quelle condition sur λ, f_λ est-il un automorphisme.
2) Une boîte Ω contient cinq boules numérotées $-2, -1, 0, 1$ et 2, toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de Ω et on note (p, q) le couple de numéros obtenus.
   On désigne par X l'aléa numérique qui à tout couple (p, q) associe la valeur :
   - -2 si aucun des f_p et f_q n'est un automorphisme.
   - 1 si un seul parmi f_p et f_q est un automorphisme.
   - 3 si les deux f_p et f_p sont des automorphismes.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
3) Déterminer une équation cartésienne du noyau et de l'image de $f_{(-2)}$.
4) Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :
   $g(x, y) = \frac{1}{2}\left(-x + 3y; \frac{1}{2}x + y\right)$.
   g appartient-elle à $L(\mathbb{R}^2)$? Justifier.

Problème :

Ce problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A :

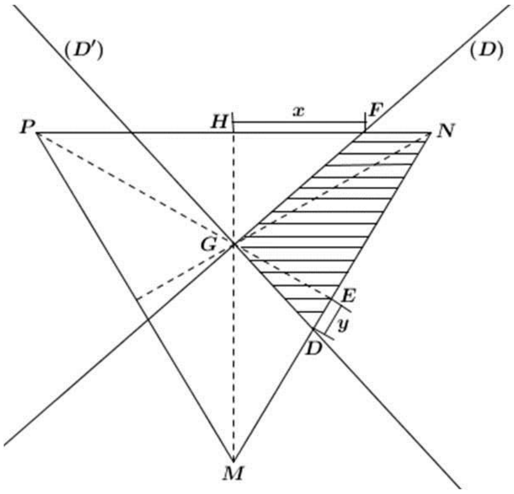
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'équation $(E) : z^3 + 64i = 0$.

1. Déterminer une solution z_0 de (E) telle que : $\overline{z_0} = -z_0$.
2. Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (E), où z_1 a une partie réelle négative.
3. Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

   $-2\sqrt{3} - 2i, 2\sqrt{3} - 2i$ et $4i$.

   Déterminer la nature du triangle ABC et montrer que les points A, B et C appartiennent à une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan qui à $M(z)$ associe $M'(z)$ tel que : $(z' - 4i) = re^{i\theta}(z - 4i)$ et qui transforme le point A en B ; r et θ étant des nombres réels.



Partie B :

Un triangle équilatéral MNP de côté 2 est divisé en quatre parties par deux droites perpendiculaires passant par son centre de gravité G. (voir figure ci-contre). On se propose de déterminer la valeur maximale de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

1. Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x - y)$.
2. Démontrer que $= \frac{3x-1}{3(x+1)}$.
3. En déduire la valeur maximale de $\mathcal{A}$.
4. L'espace est associé à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   On donne : $M(0, 2, 0); N\left(\sqrt{3}, 1, 0\right); P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

   Déterminer le système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire au triangle MNP en son centre de gravité.

Partie C :

f est la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = e^{2e^x}$.

On pose $g(x) = \ln f(x)$.

Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.