Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2008

Exercice 1 : (Série C uniquement)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x - 5y = 3$.
2. On considère la suite de nombres complexes Z_n définie par :

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) Z_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On désigne par M_n le point image de Z_n dans le plan complexe d'origine O.

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$.

(b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 2 : (série E uniquement)

On considère deux suites numériques u et v définies pour tout entier non nul n par : $u_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right)$; $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$.

1. Montrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.
2. Soient les fonctions numériques f, g et h définies par :

   $f(x) = x - \sin x$; $g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$ et $h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$.

   Montrer que pour tout x positif, $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$.
4. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$ et calculer la limite de la suite u.

Exercice 3 : (pour tous les candidats)

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient les points $A(3; -2; 2)$; $B(6; 1; 5)$; $C(6; -2; -1)$; $D(0; 4; -1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont trois points non alignés.

2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC) passant par A.
   (c) Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.
3. Donner l'expression analytique de la projection orthogonale p sur le plan (P_2).
4. (a) Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$.
   (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $L = (S) \cap (P_2)$.
5. (a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
   (b) On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{1}{3}\, aire(ABC) \times AD$.
   Déterminer alors la valeur de V.

Problème : (pour tous les candidats)

Partie A

On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0{,}4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0{,}5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0{,}7$.

On tire une boule U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules.

Soit (Q) le plan d'équation : $ax + by + cz + 6 = 0$, et soit (E) la conique d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Calculer la probabilité pour que :

(a) (Q) soit parallèle au plan $(P) : x + 2y + z - 4 = 0$.
(b) (Q) contienne le point $M(0;\ -2;\ -1)$.
(c) (E) soit une ellipse.
(d) (E) soit une hyperbole équilatère.

Partie B

On considère la fonction f définie de $[-\pi;\ \pi]\backslash\{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

1. Étudier et dresser sur $[-\pi;\ \pi]$ le tableau de variation de la fonction

$g: x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x.$

2. Démontrer que $\forall t \in [-\pi;\ \pi],\ \ 1 - \frac{t^2}{t} \leq \cos t \leq 1.$
3. En déduire que si x est un réel non nul de $[-\pi;\ \pi]$, alors
   $\ln 3 - 2x^2 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \leq \ln 3$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien. Vous distinguerez obligatoirement les cas « x positif » et « x négatif ».
4. (a) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   (b) Peut-on prolonger par continuité f en 0 ? Justifier la réponse.
5. Montrer que f est dérivable sur $[-\pi;\ \pi]\backslash\{0\}$ puis calculer le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{6}$.
   On pose h la fonction définie de $]0;\ +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{\cos x}{x}$.
6. La fonction h est-elle deux fois dérivable sur $]0;\ +\infty[$?
7. Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $xh''(x) + 2h'(x) + xh(x) = 0$ pour tout x de $]0;\ +\infty[$.

Partie C

Le plan étant direct, on considère un carré direct $ABCD$. E étant le milieu de $[CD]$, F et G sont des points tels que $DEFG$ est aussi un carré direct.

1. Faire une figure.
2. Soit s la similitude de centre D qui transforme A en B.
   Donner le rapport et l'angle de s.
3. Déterminer $s(E)$.
4. Soit Γ le cercle circonscrit à $ABCD$ et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
   (a) Calculer $mes\ (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB})$. En déduire que $I \in \Gamma$.
   (b) Montrer que les droites (IB) et (ID) sont orthogonales.
5. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right)$ et $AB = 3$.
   (a) Donner l'écriture complexe de s.
   (b) On pose $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$. Soit $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
   Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base et donner la matrice de l'application linéaire associée à s dans cette base.