Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2006

Exercice 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

On considère la transformation r définie par : à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $\begin{cases} 2x' = x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ 2y' = x\sqrt{3} + y + 1 \end{cases}$

1. (a) Donner l'écriture complexe de r.

   (b) En déduire la nature exacte et les éléments géométriques de r.

2. Soit h l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -2z + 3i$.

   Montrer que h est une homothétie de centre $\Omega(0; 1)$.

3. On considère $s = h \circ r$.

   (a) Déterminer la nature et les éléments géométriques de s.

   (b) Donner l'expression exponentielle de s.

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. Unité sur les axes $1\ cm$.

(H) est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$.

1. (a) Montrer que (H) est une hyperbole.

   (b) Déterminer respectivement le centre, les axes, les sommets et les asymptotes de (H).

2. Soit Ω le point de coordonnées $(-2; 1)$ et $\vec{e_1} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{e_2} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan.

   (a) Montrer que $(\Omega;\ \vec{e_1},\vec{e_2})$ est un repère du plan.

   (b) Montrer que l'équation cartésienne de (H) dans le repère $(\Omega;\ \vec{e_1},\vec{e_2})$ est $= \frac{1}{4X}$.

   (c) En déduire l'excentricité et les foyers de (H) dans le repère $(\Omega;\ \vec{e_1},\vec{e_2})$.

3. Représenter graphiquement (H) dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Problème :

Partie A

L'espace orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$/

On considère les points $A(1;1;\ -1{,}5)$, $B(0;1;\ -1)$, $C(-4;\ -3;\ -2)$ et $D(1;1;\ -1)$.

1. (a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Montrer que les points $A,\ B,\ C$ et D ne sont pas coplanaires.
3. Les points $A,\ B,\ C$ et D définissent un tétraèdre $ABCD$.
   Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n \end{cases}$ pour tout entier n.

1. On suppose que la suite (u_n) est convergente. Montrer alors que sa limite est $\frac{5}{3}$.
2. On pose $v_n = u_n - \frac{5}{3}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme v_0.
   (b) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.
   (c) Étudier la convergence de la suite (v_n).
3. On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de v_0 et n.
   (b) Exprimer S'_n en fonction de v_0 et n.

Partie C

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 5y = 0$.

1. (a) Déterminer la solution générale de (E).
   (b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point de coordonnées $(0;1)$ et la tangente en ce point a pour coefficient directeur -2.
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = e^{-2x}\cos x$.
   On considère (C_f) la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
   (a) Écrire une équation cartésienne de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.
   (b) Donner le signe de f sur son ensemble de définition.

3. Soit F la fonction définie par $F(x) = \frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x)$.

   (Δ) est le domaine plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$.

   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine (Δ).