

Mathématiques

Baccalauréat série C

Session 2005



Exercice 1 (Uniquement pour les candidats de C)

- (a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E): $13x - 84y = 7$.
 (b) Montrer que pour tout couple solution $(a; b)$ de (E), on a : $\text{pgcd}(a, b) = 1$ ou $\text{pgcd}(a, b) = 7$.
- Déterminer les solutions (a, b) de (E) telles que a et b soient premiers entre eux.
- Déterminer les solutions $(a; b)$ de (E) telles que : $\text{pgcd}(a, b) = 7$.

Exercice 1 (Uniquement pour les candidats de E)

Soit $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin^3 x$, où a et b désignent deux réels.

- Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. $f'_{a,b}$ et $f''_{a,b}$ désignent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de $f_{a,b}$.
- Déduire les primitives de $f_{a,b}$ sur $\mathbb{R}$.
- (a) Déterminer la primitive de $f_{a,b}$ dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ et a une tangente au point A parallèle à la première bissectrice.
 (b) Soit f la fonction définie en x par : $f(x) = -\sin x + 2 \sin^3 x$, et F une primitive de f .
 Écrire une équation de la tangente à la courbe de F au point A parallèle à la première bissectrice.

Exercice 2

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $g(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Soit (C_g) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique sur les axes : 2 cm.

- (a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
 (b) Montrer que l'axe des abscisses est asymptote et l'axe des ordonnées est une branche parabolique à la courbe (C_g) .

- (c) Tracer la courbe (C_g) .
2. Soit (Δ) le domaine plan limité par les droites d'équations $x = -2$; $x = 0$; $y = 0$, la courbe (C_g) et la droite (D) d'équation $y = 2x + 4$.
- (a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de (D) et de (C_g) .
- (b) Calculer l'aire de (Δ) .
3. Soit $ABCD$ un carré direct du plan de centre I et de côté a , s la similitude directe de centre A qui transforme C en B .
- (a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s .
- (b) Montrer que I est l'image de D par s .
- (c) En déduire l'aire de $s(\Delta)$, image de (Δ) par s .

Problème

Partie A

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et x un réel positif.
Montrer par récurrence que : $(1 + nx) \leq (1 + x)^n$.
2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n . On les place toutes au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n , chaque boîte pouvant contenir de zéro à n boules.
Calculer la probabilité P_n pour que chaque boîte contienne exactement une boule.
3. On pose $P_n = \frac{n!}{n^n}$, où $n!$ désigne « factoriel n ».
- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{P_n}{P_{n-1}} \geq 2$.
- (b) En déduire l'inégalité : $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
- (c) Calculer la limite de la suite (P_n) quand n tend vers $+\infty$.

Partie B

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$, g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}' = \left(x + \frac{1}{2}y\right)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$.

1. (a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective.
(b) Déterminer le noyau $\text{Ker } g$ et l'image $\text{Im } g$ de g .
(c) En déduire que $\text{Ker } g = \text{Im } g$.
2. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\text{Ker } g$.
Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.
3. Soient $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de coordonnées respectives $(-1; 2)$ et $(-1; 1)$.

- (a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2 .
- (b) Donner la matrice de g dans la base B' .

Partie C

Dans la plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit les trois points $A(1; 0)$; $B\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $C\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ et la droite (D) dont une équation est $x = 1$.

1. (a) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\vec{CG} = \vec{AB}$.
(b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABGC$?
2. On note (Γ) l'ensemble des points M de (P) , de coordonnées $(x; y)$, qui vérifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x - 1)^2$.
(a) Montrer que B et C appartiennent à (Γ) .
(b) Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de (P) tels que : $MG = a\sqrt{2}$, où a désigne la distance du point M à la droite (D) .
(c) En déduire la nature de (Γ) et préciser son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée.
3. Représenter (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.