

Mathématiques

Baccalauréat série C

Session 2004



Exercice 1

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère la parabole (P) d'équation : $y^2 = -2x + 1$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (P) et de l'axe $(O; \vec{e}_2)$.
 (b) Déterminer les équations cartésiennes des tangentes à (P) en ces points.
 (c) Déterminer les coordonnées du foyer de (P) et une équation de sa directrice.

2. On prendra 2 cm comme unité de longueur sur les axes.

Tracer (P) ainsi que ses tangentes.

3. Soit l'application s du plan définie analytiquement par :
$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$$

- (a) Montrer que s est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
 (b) Déterminer une équation cartésienne de l'image (P') de (P) par s et construire (P') .

Exercice 2

Dans cet exercice, p désigne un nombre complexe dont la partie imaginaire est non nulle.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

L'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ a deux solutions z_1 et z_2 appartenant à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On considère les points A , B , P , M' et M'' d'affixes respectives 1, -1 , p , z_1 et z_2 .

1. Démontrer sans calculer z_1 et z_2 que :
 - (a) P est le milieu de $[M'M'']$;
 - (b) $OM' \times OM'' = OA^2 = OB^2$;
 - (c) La droite (xx') de repère $(O; \vec{u})$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{M'OM''}$.
2. Démontrer que les points A , B , M' et M'' sont cocycliques.
3. (a) Calculer $(z_1 - p)^2$ et $(z_2 - p)^2$ en fonction de p .
 (b) En déduire que :

- $PA \times PB = PM'^2 = PM''^2$.
- La droite $(M'M'')$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{APB}$.

4. Le point P étant donné, donner un programme de construction des points M' et M'' .

Problème

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+6}{2x-4}$ et t un nombre réel. (C_f) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité de longueur sur les axes 1 cm.

- Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que, pour tout réel x différent de 2 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-4}.$$
- (a) Étudier les variations de la fonction f .
 (b) Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique dont on déterminera une équation cartésienne et un centre de symétrie $\Omega\left(2; \frac{7}{2}\right)$.
 (c) Construire la courbe représentative (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (a) Déterminer l'équation $Y = f(X)$ de la courbe (C_f) dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$.
 (b) Montrer que le produit XY des coordonnées d'un point de (C_f) , par rapport au repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$, est strictement supérieur à 8.
 (c) Discuter selon les valeurs du paramètre t , l'intersection de la droite (D_t) d'équation $Y = tX$ et de la courbe (C_f) .
- Exprimer en fonction de t les coordonnées $(X; Y)$ des points d'intersection quand ils existent de (D_t) et (C_f) .

- (H) désigne la courbe qui a pour équation $y = \frac{8}{x-2}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit V_n l'aire de la portion du plan limité par les droites d'équation $x = 6$, $x = 6 + n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et les courbes C_f et (H) .

- Exprimer V_n en fonction de n .
 - Montrer que la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égal à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et déduire la somme $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n .
 - Montrer que le plus petit entier naturel n satisfaisant à la condition $S_n > 100$ est 6.
- On considère la suite U_n définie par
$$\begin{cases} U_0 = 10 \\ U_n = \frac{4}{5}f(U_{n-1}) \end{cases}$$

- (a) Calculer U_1 et exprimer $U_n - 2$ en fonction de U_{n-1} .
 - (b) Montrer alors que $(U_n - 2)(U_{n-1} - 2)$ est positif pour tout entier naturel non nul.
 - (c) Dédire que pour tout entier naturel n , $(U_n - 2)$ est positif.
7. (a) Calculer $(U_n - 6)$ et montrer que pour tout entier naturel $(U_n - 6)$ est positif.
- (b) Démontrer l'inégalité : $U_n - 6 \leq \frac{(U_{n-1} - 6)^2}{10}$ pour tout entier naturel non nul.
- (c) En raisonnant par récurrence, montrer que $U_n - 6 \leq 10 \left(\frac{2}{5}\right)^{2n}$ pour tout entier naturel n .
- (d) Dédire que la suite (U_n) converge et calculer la limite de (U_n) quand n tend vers $+\infty$.