Mathématiques

Baccalauréat série C — Session 2002

Exercice 1 :

p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Démontrer par récurrence que $\sum_{j=1}^{p} j \cdot 2^{j} = (p-1) \cdot 2^{p+1} + 2$.

   (b) On a mis dans une boite N jetons numérotés de 1 à p indiscernables au toucher.

   Le tableau ci-dessous donne la répartition des jetons suivant leurs numéros.

Numéro de jeton	1	2	3	...	j	...	p
Nombre de jetons	2	2^2	2^3	...	2^j	...	2^p

   Calculer N.

2. On extrait au hasard un jeton de la boîte ; les tirages sont supposés équiprobables.

   Pour tout j de l'intervalle $[1; p]$, on note A_j l'évènement « tirer un jeton portant le numéro j » et P_j la probabilité de A_j.

   (a) Calculer P_j en fonction de j et de p.

   (b) On pose $E = \sum_{j=1}^{p} j \cdot P^{j}$.

   En utilisant le résultat de 1-a), calculer E en fonction de p.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. (P_1), (P_2) et (P_3) désignent trois plans ayant pour équations cartésiennes respectives : $3x + y - 2z + 2 = 0$;

$x - y + z + 3 = 0$; $x + 5y + 4z - 1 = 0$.

1. Démontrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires, puis déterminer une représentation paramétrique de la droite (D), intersection de (P_1) et de (P_2).
2. (a) Démontrer que (D) est perpendiculaire à (P_3).

   (b) En déduire que les 3 plans ont un seul point de rencontre.
3. s désigne la symétrie orthogonale par rapport à (P_3); (P'_1) et (P'_2) désignent les images respectifs de (P_1) et (P_2) par s.

   (a) Donner l'expression analytique de s dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

(b) Démontrer que (P'_1) et (P'_2) sont perpendiculaires.

Exercice 3 :

1. (a) Démontrer par récurrence la propriété suivante :
   Quels que soient les nombres réels a et b et l'entier naturel n supérieur ou égal à 2, $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$.
   (b) Démontrer que si p et q sont deux entiers naturels quelconques, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
2. (a) On note P l'ensemble des nombres premiers.
   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2^n - 1) \in P \Longrightarrow n \in P$.
   (b) Démontrer que $2^{11} \equiv 1 (mod\ 23)$.
   (c) La réciproque de la proposition 2.a) est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Problème :

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère :

∗ l'application f qui à tout point $M(x, y)$ du plan associe le point $M'(x', y')$ tel que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}$.

∗ (C) désigne la courbe du plan dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$.

On note (Γ) l'image de (C) par f et H le projeté orthogonal de M sur l'axe $(O;\ \vec{\imath})$.

1. (a) Démontrer que f est bijective et donner l'expression analytique de f^{-1} dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{HM'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$.
2. (a) Démontrer que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).
   (c) Tracer (C) et (Γ) dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie B

Dans toute cette partie,

- f désigne la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$.

I. Étude et représentation graphique de la fonction f.

1. (a) Déterminer les limites de f à droite de 0 et en $+\infty$.

   (b) Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.

2. (a) Démontrer que f est une bijection de $]0; +\infty[$ dans $]-\infty; 0[$.

   (b) Tracer dans un même repère les courbes de f et de f^{-1}.

   (On prendra $2cm$ comme unité de longueur sur les axes).

   (c) α désigne un réel strictement positif et inférieur à 1.

   On note (D) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $\alpha \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

   En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de α l'aire de (D) en cm^2.

   (d) Calculer la limite de cette aire lorsque α tend vers 0 à droite.

II. Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

   (b) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on pourra utiliser le signe de f).

2. Démontrer que :

   (a) $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{n}$.

   (b) Pour tout entier $\in [1, n-1]$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.