Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2001

Exercice 1 :

a et b sont deux entiers naturels non nuls ; E désigne l'ensemble des entiers relatifs z tels qu'il existe deux entiers relatifs x et y vérifiant $z = ax + by$.

1. Démontrer que E contient au moins deux entiers naturels non nuls.
2. On note d le plus petit entier naturel de E.
   (a) Démontrer que tout multiple de d appartient à E.
   (b) Démontrer que tout élément z de E est un multiple de d (on pourra envisager la division euclidienne de z par d).
   (c) En déduire que E est l'ensemble des multiples de d.
3. Démontrer que d est le plus grand diviseur commun de a et b.
4. **Application numérique :**
   Démontrer que l'ensemble des entiers relatifs z de la forme $z = 9801x + 11664y$ est égal à l'ensemble des multiples de 81.

Exercice 2 :

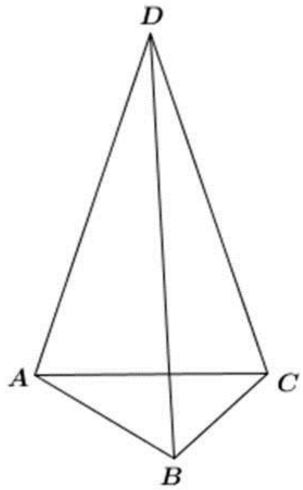
E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et

f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$; $f(\vec{\jmath}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$.

On note $Ker\, f$ le noyau de f et $Im\, f$ l'image de f.

1. Déterminer une base de $Ker\, f$.
2. Déterminer une base de $Im\, f$.
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Ker\, f$ et d'un vecteur de $Im\, f$.
4. (a) Vérifier que $f \circ f = f$.
   (b) Démontrer que $\vec{u} \in Im\, f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$. (on utilisera 4.a).

Exercice 3 :



Sur la figure ci-dessus, $ABCD$ est un tétraèdre.

On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AB], [CD], [BC], [AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.

G est l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre.

1. Démontrer que les droites $(IJ), (KL)$ et (MN) sont concourantes en G.
2. A' désigne le centre de gravité du triangle ABC.
   Montrer que les points D, G et A' sont alignés.
3. Dans cette partie, on suppose l'espace orienté, les triangles BCD, BAD et BCA sont isocèles et rectangles en B.
   On note R_1 le demi-tour d'axe (BA), R_2 la rotation d'axe (BD) qui transforme C en A.
   Refaire une autre figure et compléter en construisant les images respectifs A_1, B_1 et C_1 des points A, B et C par R_1, puis les images A_2, B_2 et C_2 des points A_1, B_1 et C_1 par R_2 (On précisera ces images au cas où elles sont des points de la figure).

Problème :

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A

On considère un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (toutes les coordonnées seront données à partir de ce repère).

On note :

- g l'application du plan sur lui-même qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{6}{5}x + \dfrac{2}{5}y + 1 \\ y' = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{9}{5}y + 2 \end{cases}$$

- M'' est le symétrique de M' par rapport à M.
- A_0 est le point de coordonnées $(3; 1)$.
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des points définie par $A_{n+1} = g(A_n)$.
- (x_n, y_n) sont les coordonnées de A_n.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et indépendante de M.
2. Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque M décrit (P).
3. Déduire des questions 1 et 2 une construction géométrique du point M' lorsque M est connu.
4. (a) Démontrer que les points A_n appartiennent tous à la droite d'équation cartésienne $2x - y = 0$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $x_{n+1} = 2x_n - 1$.
5. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des nombres entiers.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

   (c) En déduire que la suite (x_n) est divergente.

Partie B

On considère :

- f la fonction de la variable réelle x telle que : $f(x) = e^{3x-3} + x$.
- Les équations différentielles $(E) : y'' - y' - 6y = 6x - 1$ et $(E') : y'' - y' - 6y = 0$.

On note :

- (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan (unité de longueur sur les axes : $2cm$).
- (D) la partie du plan définies par les droites d'équation $x = 0$, $y = x$, $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$ et la courbe (C).
- a_λ l'aire en cm^2 de (D) en fonction de λ.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Démontrer que (C) coupe l'axe des abscisses en un point A dont l'abscisse α vérifie $-1 < \alpha < 0$.
3. (a) Démontrer que lorsque x tend vers $-\infty$, (C) admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique.

Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.

(b) Étudier le comportement de (C) lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Tracer (C).

4. (a) Calculer a_λ.

   (b) En déduire la limite de a_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

5. On se propose de résoudre l'équation (E).

   (a) On admet qu'il existe une fonction affine g solution de (E). On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$.

   Calculer alors a et b.

   (b) Soit h une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable.

   Démontrer que h est solution de (E) si et seulement si, $h - g$ est solution de (E').

   (c) Résoudre (E').

   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   (e) Démontrer que la fonction f est la solution de (E) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.