Mathématiques

Baccalauréat série C Session 2000

Exercice 1 :

X est une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabiliste fini de probabilité P, sachant que X prend les valeurs $0, 1, 2$ et 3 et que $P(X < 2) = \frac{1}{3}$; $P(X < 2) = 0{,}5$; $P(X = 0) = P(X = 1)$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité de X.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$				

2. En déduire l'espérance mathématique et l'écart type de X.

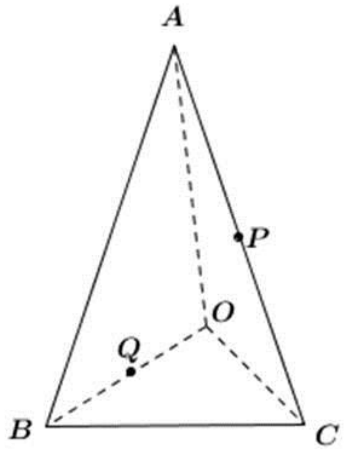
Exercice 2 :

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

À tout point M d'affixe z non nul, on associe le point M' d'affixe $= \frac{z^2+1}{2z}$. On note $z = x + iy$; $Z = X + iY$; x, y, X et Y sont des nombres réels.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. R étant un nombre réel strictement positif différent de 1, on suppose que le point d'affixe $z = x + iy$ est un point du cercle (C) de centre O et de rayon R ; θ est un nombre réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$ désignant la mesure en radians de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$.
   (a) Vérifier que $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$.
   (b) Déduire de la question 1) les expressions de X et Y en fonction de θ et de R.
3. (a) Écrire entre X et Y une relation indépendante de θ.
   (b) En déduire que, lorsque M décrit (C), l'ensemble des points M' d'affixe Z est une conique dont on précisera la nature.
   On suppose dans cette question que $R = 2$, tracer la conique obtenue en faisant apparaître ses foyers et ses directrices.

Exercice 3 :



Sur la figure ci-contre, O, A, B et C désignent quatre points non coplanaires de l'espace affine euclidien ; P et Q les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[OB]$.

On note D le barycentre des points O, A, B et C affectés des coefficients $3, 2, 3$ et -2.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DQ}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires ; placer le point D sur la figure.

   Dans toute la suite de l'exercice, on note :

   - M un point de l'espace ;
   - $\vec{V} = \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{W} = 3\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
   - (Δ) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{V}$ et $\vec{W}$ soient colinéaires ;
   - (S) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\vec{V}\| = \|\vec{W}\|$.

2. (a) Vérifier que $\vec{V} = 2\overrightarrow{PQ}$ et que $\vec{W} = 6\overrightarrow{MD}$.

   (b) En déduire la nature de (Δ), ainsi que celle de (S).

3. On suppose (pour cette question) l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et que les points A, B et C ont pour coordonnées $(2; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$ et $(0; 0; 1)$ respectivement.

   Écrire une équation cartésienne de (S) et un système d'équations paramétriques de (Δ).

Problème :

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C

Dans tout le problème, f désigne la fonction de la variable réelle x définie dans l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ pour $x \neq 0$; $f(0) = 1$.

I-1. Démontrer que f est continue en 0.

2. Démontrer que f est dérivable dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$ et calculer sa dérivée première dans cet intervalle.

La recherche du signe de la dérivée de f conduit à l'étude d'une fonction auxiliaire g.

II- La fonction g est définie dans l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par : $g(x) = \frac{-2x}{x+2} + \ln(x+1)$.

1. a) Démontrer que, pour tout x de $[0;\ +\infty[$, $g(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

b) En déduire que pour tout x de $]0;\ +\infty[$, $x^2 f'(x) \leq -g(x)$.

A) Étude du signe de g

2. Démontrer que g est dérivable dans $[0;\ +\infty[$ et calculer $g'(x)$.

3. a) Démontrer que pour tout x de $[0;\ +\infty[$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

b) Démontrer que, pour tout x de $[0;\ +\infty[$, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.

c) En déduire le signe de g et le sens de variation de f dans l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

B) Étude de la dérivabilité de f en 0.

4. a) À partir de 3-b), vérifier que pour tout x de $[0;\ +\infty[$,

$$\frac{-x^3}{12} + \frac{x^2}{x+2} \leq x - \ln(x+1) \leq \frac{x^2}{x+2}.$$

b) En déduire que, pour tout x de $[0;\ +\infty[$,

$$\frac{-x}{12} + \frac{1}{x+2} \leq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{x+2}.$$

5. Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

C) Tracé de la courbe de f

6. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé du plan ;

(On prendra $1cm$ pour une unité de longueur sur les axes).

7. D désigne la partie du plan définie par les droites d'équation $x = \frac{1}{2}; x = 1; y = 0$ et la courbe de f.

On notera a l'aire de D.

Démontrer que $0{,}20 \leq a \leq 0{,}70$.