Mathématiques

PROBATOIRE Série D Session 2014

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet C tel que : $AB = 6\text{cm}$ et $AC = 4\text{cm}$.

1. Déterminer et construire le point G barycentre des points pondérés $(A; 3)$, $(B; 2)$ et $(C; -1)$.
2. Soit h la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.
3. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 26$.
   (a) Déterminer et construire (Γ).
   (b) Construire l'image (Γ') de (Γ) par h.

Exercice 2

I. 1 . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos x + \sqrt{3}\, sinx$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0; 2\pi[$, l'équation $\cos x + \sqrt{3}\, sinx = \sqrt{2}$.
3. Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

II. Un GIC d'un village compte 80 membres répartis en 3 catégories selon le tableau suivant :

On désire former un bureau composé d'un président, d'un commissaire aux comptes et d'un censeur.

1. Combien de bureaux différents peut-on former ?
2. Combien de bureaux ne comportant ne comportant pas de jeunes peut-on former ?

Problème

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le tableau ci-dessous est une partie du tableau de variations d'une fonction paire f de courbe répresentative (C).

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

1.Donner le domaine de définition D_f.

2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(b) Quels sont l'asymptote et l'élément de symétrie (C).

3. Quel est le signe de $f\,'$ sur $]-\infty\,;0]$?

4. Recopier et compléter le tableau de variation ci-dessus.

5. Construire la courbe (C) (Unité sur les axes 2cm).

6. On admet que $f(x) = \frac{ax^2+b}{x^2+1}$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b.

7. Pour x élément de D_f, on pose $h(x) = -f(x)$. Déduire de (C) la courbe (Γ) de h.

Partie B :

On donne $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = g(n) \end{cases}$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3. Etudier le signe de $U_n - 2$ et en déduire que la suite (U_n) est majorée.
4. Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.