Mathématiques

PROBATOIRE Série D Session 2006

L'épreuve comporte deux exercices et un problème obligatoires.

Exercice 1

A. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le système suivant : $\begin{cases} 45x + 75y + 120z = 5460 \\ 7x + 10y + 16z = 770 \\ 35x + 45y + 60z = 3420 \end{cases}$

Un seul des triplets suivants est solution de ce système. Ecrire la bonne réponse sur votre feuille de composition :

1) (41 ;8 ; 16) ; 2) (16 ;22 ;42) ; 3) (42 ;22 ;16) ; 4) (43 ;21 ; 15).

B. 1. Un comité de développement d'un village voudrait acheter les appareils suivants : une motopompe, une tronçonneuse et un groupe électrogène. Pour obtenir des fonds, il repartit ses membres en trois groupes selon leurs revenus. Le tableau ci-dessous donne la contribution de chaque membre par appareil en fonction de son groupe.

Sachant que la motopompe, la tronçonneuse et le groupe électrogène coûtent respectivement : $546\,000$ F, $770\,000$ F et $342\,000$ F.

(a) Calculer le nombre de membres de chaque groupe.

(b) En déduire le nombre de membres de ce comité.

1. On procède à une répartition par tranche d'âge des membres de ce comité et on obtient le tableau suivant :

Appareils	Contribution par membre		
	Groupe A	Groupe B	Groupe C
Motopompe	4500	7500	12000
Tronçonneuse	7000	10000	16000
Groupe électrogène	3500	4500	6000

(a) Donner les classes modales.

(b) Un seul des couples ci-dessous représente la moyenne $\bar{x}$ et la valeur approchée de l'écart-type à 10^{-2} près de cette série statistique. Ecrire la bonne réponse sur votre feuille de composition.

1) (39 ; 7,05) ; 2) (42 ; 7,05) ; 3) (52 ; 8,25) ; 4) (42 ; 8,2).

Exercice 2

Sur une fiche de salaire de certains employés figure un nombre appelé indice . En l'an 2006 l'indice de Monsieur X est noté A_0 et celui de Monsieur Y est noté B_0. On suppose que $A_0 = B_0 = 500$.

Chaque année, l'indice de Monsieur X augmente de 90 points tandis que celui de Monsieur Y augmente de 10%. On note A_n l'indice de Monsieur X pour l'année $2006 + n$ et B_n celui de Monsieur Y pour la même année.

1. Calculer A_1, A_2, B_1 et B_2.
2. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n, puis B_{n+1} en fonction de $\mathrm{B_n}$.
3. En déduire la nature des suites (A_n) et (B_n).
4. Exprimer A_n et B_n en fonction de n.
5. En déduire l'indice de Monsieur X et celui de Monsieur Y en l'an 2013.

<u>Problème</u>

Partie A :

Le plan P est rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient $A(-2; 1)$, $B(2; 1)$ et $S(3; -1)$ trois points du plan P.

1. (a) Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment $[AB]$.

   (b) Soit M un point du plan. Exprimer le réel $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de IM et AB.

   (c) En déduire la nature de l'ensemble (C) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

   (d) Donner une équation cartésienne de (C).

2. (a) Déterminer les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés :

$(A, 2)$; $(B, -5)$ et $(S, 1)$.

   (b) Placer le point G dans le repère.

Partie B :

Soit (P) l'arc de la parabole définie sur $[2; 4]$ par $f(x) = ax^2 + bx + 17$ avec $a \neq 0$.

1. Déterminer les réels a et b sachant que (P) passe par le point B et que (P) admet pour sommet $S(3; -1)$.
2. Soit g, la fonction numérique de la variable réelle définie sur $[2\,;4]$ par :
   $$g(x) = 2x^2 - 12x + 17.$$
   Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. (a) Déterminer les abscisses des points F_1 et F_2, intersection de (P)avec l'axe des abscisses.
   (b) Donner des équations cartésiennes des tangentes aux points F_1 et F_2.

Partie C :

Soit (H) la branche de l'hyperbole définie sur $[4;+\infty[$ par $h(x) = -1 + \frac{2}{x-3}$.

1. Etudier les limites de h aux bornes de $[4;+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de h.
3. Montrer que la droite d'équation : $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe (H).
4. Représenter dans le même repère graphique le cercle d'équation $x^2 + (y-1)^2 = 4$; l'arc de la parabole (P) et la branche de l'hyperbole (H) définie sur $[4;+\infty[$.