

Mathématiques

PROBATOIRE Série D

Session 2008



Exercice 1

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par :
$$\begin{cases} U_0 = 20\,000 \\ U_{n+1} = 1,05U_n + 1000 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

et $V_n = U_n + 20\,000$.

1. Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 1,05.
2. Exprimer V_n , puis U_n en fonction de n .
3. Le 1^{er} janvier 2006, la population d'une ville est de 20 000 habitants. Cette population augmente de 5% chaque année par les naissances et reçoit aussi par an 1000 immigrants suite à l'exode rural.

Dans la série des deux questions qui suivent, une seule des quatre réponses proposées est juste.

(a) La population de cette ville au 1^{er} janvier 2014 est

- i) V_{14} ; ii) $U_{14} + 6$; iii) U_8 ; iv) U_{14} .

(b) Sachant que la population scolaire de la ville représente les 20% des habitants et qu'il faut un enseignant pour 40 élèves, le nombre d'enseignants dans la ville au 1^{er} janvier 2014 est :

- i) $\frac{0,2}{40} V_{14}$; ii) $\frac{40}{0,2} (U_{14} + 6)$; iii) $5 \cdot 10^{-3} U_8$; iv) $\frac{1}{5} U_{14}$.

Exercice 2

1. Montrer que $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2 - (-1 + \sqrt{2})t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
3. (E) est l'équation: $2\cos^2 x - (-1 + \sqrt{2})t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
Trouver les solutions de (E) dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.
4. Placer les points images de toutes les solutions de (E) sur un cercle trigonométrique.

Problème

Partie A :

On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$. (C_g) est sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudier le sens de variations de g .
2. Etudier les limites de g en $+\infty$, $-\infty$ et 1.
3. Dresser le tableau de variation de g .

4. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
5. En déduire que (C_g) possède deux asymptotes dont on donnera les cartésiennes dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
6. Tracer (C_g) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra 1cm comme unité sur les axes.
7. Montrer que le point $I(1; 3)$ est centre de symétrie de (C_g) .

Partie B :

Le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soient $E(1; -3)$ et $F(1; 3)$ deux points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point J tel que E soit le symétrique de F par rapport à J .
2. (a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$.
 (b) En déduire la nature de (Γ) , ensemble des points du plan tels que : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 7$.
 (c) Construire (Γ) dans $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
3. Donner une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
4. (Γ) rencontre l'axe (ox) en deux points A et B et la parallèle à (oy) passant par J en deux points C et D .
 (a) Donner les coordonnées des points A, B, C et D .
 (b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $ACBD$?
 (c) Calculer son aire.