Mathématiques

PROBATOIRE Série D — Session 2000

L'épreuve comporte deux exercices et un problème répartis.

Exercice 1 :

I- On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par

$$\begin{cases} U_0 = 1\,000\,000 \\ U_{n+1} = 1{,}08U_n - 40\,000 \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = U_n - 500\,000$$

(a) Calculer U_1, U_2 et U_3

(b) i. Déterminer le nombre réel a tel que pour tout naturel n on ait $V_{n+1} = aV_n$

ii. En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme V_0 et la raison q.

iii. Calculer V_n en fonction de n et en déduire l'expression de U_n en fonction de n.

II- Le 1^{er} décembre 1995, Monsieur X avait placé 1 000 000 F dans une banque à un taux de 8% par an, à intérêts composés. Parallèlement, Monsieur X retire une somme de 40 000 F le 1^{er} décembre de chaque année pour préparer ses fêtes.

Quelle somme aura Monsieur X dans sa banque le 1^{er} décembre 2001 ?

Exercice 2 :

1- Déterminer le nombre réel a, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ $tel\ que$: $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos(x + a)$.

2- Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.

3- Représenter les images des solutions sur un cercle trigonométrique.

Problème

Partie A

Déterminer les nombres réels a, b et c, sachant que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^3 + bx + c$, est impaire et que le point $A(1\,;2)$ est extremum relatif pour sa courbe représentative.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 3x$. On désigne par (C)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Etudier la parité de la fonction . Que peut-on en déduire pour la courbe (C).

2- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3- Soit (T) la tangente à (C) en O.

(a) Donner une équation de (T).

(b) Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4- (a) Etudier la parité de la fonction $f\,'$, dérivée de f.

(b) soit α un réel non nul. Montrer que les tangentes à (C) $aux\ points\ A\ et\ A'$ d'abscisses respectives $\alpha\ et -\alpha$, sont parallèles.

5- Tracer la courbe (C) et la tangente (T).

6- Utiliser la courbe (C) pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $0 \leq -x^3 + 3x \leq 2$.