

Mathématiques

PROBATOIRE Série C

Session 2014



Exercice 1

I.

(a) Calculer $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$\begin{cases} a + b = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

(c) En déduire dans $]0; \frac{\pi}{2}[\times]0; \frac{\pi}{2}[$, les solutions du système d'inconnues $(x; y)$ suivant :

$$\begin{cases} 2 \sin x + 2 \sin y = \sqrt{3} + 1 \\ \sin x \times \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

II. Dans un plan vectoriel E muni d'une base $B = (\vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application

linéaire f de E vers E et de matrice $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ relativement à B .

(a) Déterminer le noyau et l'image de f .

(b) On pose $M' = 2M - 2I$ où $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Justifier que M' est la matrice inverse de M .

Exercice 2

On s'est intéressé au nombre de personnes qui ont visité un site touristique sur 7 ans. Les résultats de cette enquête sont consignés le tableau ci-dessous :

Rang de l'année (X)	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de personnes en milliers (Y)	1,5	2	3,5	1	6	8	10

1. Représenter le nuage de points de la série statistique ainsi définie.

2. (a) Calculer la covariance de la série statistique $(X; Y)$. On donnera le résultat à 10^{-2} près par excès.

(b) En prenant la moyenne de Y égale à 4,57 ; la variance de X égale à 4 et la variance de Y égale à 10,46 :

i. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y .

- ii. Justifier qu'une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 1,43x - 1,15$.

(a) En déduire une estimation du nombre de personnes qui visiteront ce site en l'année de 31.

3. Ce site comporte 5 escales distinctes nommées A, B, C, D et E . Elles sont obligatoire pour tous ses visiteurs qui y passent une seule fois par escale. De combien de façons distinctes peut-on :

(a) Parcourir les 5 escales ?

(b) Parcourir les 5 escales si on commence par l'escale A ?

Problème

Partie A :

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct de centre O et de côté $AB = 6$. I est milieu du segment $[AB]$, M et N des points des segments $[AD]$ et $[DC]$ respectivement tels que $AM = DN$; $M \neq A$ et $M \neq D$.

- Soit r la rotation qui transforme A en D et M en N . Déterminer la mesure principale de l'angle de r .
 - Montrer que $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$.
 - En déduire que O est le centre de rotation r . On pose pour toute la suite $AM = x$ et on appelle G , le barycentre du système $A(7 - x), B(1)$ et $D(x)$.
 - Soit k le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM}$. Déterminer k en fonction de x et en déduire que M est le barycentre de A et D affectés respectivement des coefficients $6 - x$ et x .
 - Vérifier que $(7 - x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (6 - x)\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GD}$ et en déduire le barycentre des points M et I affectés de coefficients que l'on déterminera.
 - Soit G' l'image de G par r et J le milieu de $[AD]$. justifier que $\overrightarrow{G'J} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$.
 - Exprimer les aires des triangles IAM et MDN en fonction de x .
 - Montrer que l'aire $\mathcal{A}_1$ du trapèze $BCNI$ en unité d'aire est $\mathcal{A}_1 = 27 - 3x$.
- (a) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle IMN en unité d'aire est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$.

Partie B :

Soit f la fonction définie de l'intervalle $[0; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$.

- Calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition.

2. (a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
(b) En déduire que pour tout réel $x \in [0; 6]$, $f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$.
(c) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale.
3. Représenter f dans un repère orthogonal. (Echelle : 1cm pour 1 unité en abscisse ; 1cm pour 3 unités en ordonnées).
4. Soit g la fonction définie de $[-6; 6]$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.
 - (a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.
 - (b) Justifier que g est une fonction paire.
 - (c) Déduire en traits interrompus courts la courbe de g à partir de celle de f .