Mathématiques

PROBATOIRE Série C Session 2012

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|4x+2| > |3-x|$.
2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $(x-1)(x^2-3) = 39$.

(a) Écrire 39 sous la forme d'un produit de facteurs premiers.

(b) Trouver alors une solution de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entier naturels.

(c) Montrer que cette solution entière est l'unique qu'admet l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.

3. Calculer le réel défini par : $A = \left(1+\frac{1}{4}\right) \times \left(1+\frac{1}{5}\right) \times \left(1+\frac{1}{6}\right) \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{999}\right)$.

Exercice 2

1. Soit θ un nombre réel.

(a) Développer $(\cos^2\theta - \sin^2\theta)^2$.

(b) En déduire que $cos^4\theta + cos^4\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$.

(c) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $cos^4\theta + cos^4\theta = \frac{5}{8}$.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et telle que :

$$U_0 \in \mathbb{R}^* \ ;\ q > 0, \text{ et } \quad \begin{cases} U_0 \times U_1 \times U_2 = 27 \\ U_0 \times U_2 \times U_4 = 216. \end{cases}$$

(a) Déterminer la raison et le terme initial U_0.

(b) En déduire U_n en fonction n.

Problème

Partie A :

1. On considère les fonctions numériques suivantes : $\begin{aligned} f: [-2;2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$ et

$$\begin{aligned} g: [0;4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2-4x+5 \end{aligned}$$

$(\mathcal{C})$et $(\mathcal{C}')$ sont respectivement les courbes représentatives des fonctions $f$et g dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan P.

(a) Construire la courbe$(\mathcal{C})$.

(b) Vérifier que pour tout x de $[0;4]$, $g(x) = f(x-2)+1$.

(c) Comment peut-on déduire la courbe $(\mathcal{C}')$ de celle de $(\mathcal{C})$?

(d) Représenter la courbe $(\mathcal{C})$.

2. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et par h l'homothétie de centre O et de rapport 2. Soient I et J les points de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$.

(a) Construire les images I' et J' des points I et J par la translation $s = r \circ h$.

(b) Donner la nature du triangle $OI'J'$.

(c) Démontrer que les droites (II') et (JJ') sont perpendiculaires.

(d) Montrer que $II' = JJ'$.

Partie B :

E est le plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et f l'application linéaire de E dans E définie par $f(\vec{\imath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

1. Ecrire la matrice M de f dans $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.
4. Donner une base de l'image de f.
5. Donner l'expression analytique de $f \circ f$.

Partie C :

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations cartésiennes respectives : $2x+3y+6z=0$ et $3x-6y+2z+1=0$.

1. Démontrer que (P) et (P') sont perpendiculaires.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des 2 plans (P) et (P').
3. Soit A le point de coordonnées $(-4;1;-2)$.

(a) Calculer les distances du point A à (P) et à (P').

(b) En déduire la distance de A à (D).