

Mathématiques

PROBATOIRE Série C

Session 2009



Exercice 1

Pour chacune des questions de cet exercice, trois réponses vous sont proposées parmi lesquelles une seule est juste ; reproduire sur votre feuille de composition, le numéro de la question et celui de la réponse juste correspondante.

N.B : Aucun calcul n'est exigé dans cet exercice

- Dans un ensemble à n éléments, s'il y a autant de parties à deux éléments que de parties à quatre éléments, alors n est solution de l'équation du second degré :
 (a) $n^2 + 5n - 6 = 0$; (b) $n^2 - 5n - 6 = 0$; (c) $n^2 - 5n + 6 = 0$.
- On considère une suite géométrique (U_n) , de premier terme $\frac{1}{2}$, et de raison $-\frac{1}{2}$. On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$. S_n est égal à :
 (a) $\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$, (b) $\frac{1}{3} \left[1 - (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$ (c) $\frac{1}{3} \left[1 - (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$
- Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$; f est un endomorphisme définie pour tout $\vec{u}(x, y)$ par $f(\vec{u}) = (2x + y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j}$. L'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = 4\vec{u}$ est :
 (a) La droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_0(1; 2)$;
 (b) La droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_1(-1; 2)$;
 (c) $\{0\}$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie pour tout x par $f(x) = \frac{4x^2 - 12}{|x| + 2}$. $(\mathcal{C})$ désigne, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f .

- (a) Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.
 (b) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
- Montrer que, lorsque x tend vers l'infini, la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux demi-asymptotes (T) et (T') dont on donnera les équations cartésiennes respectives.
- Montrer que f est paire.
- Etudier les variations de f dans $\mathbb{R}^-$.
- Tracer $(\mathcal{C})$, (T) et (T') .

Problème

Partie A :

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral direct ABC . On construit les triangles équilatéraux directs ADB et ACE . G_1 et G_2 désignent respectivement les centres de gravité des triangles ADB et ACE .

1. Montrer que (CD) et (BE) sont les médiatrices respectives de $[AB]$ et de $[AC]$.
2. On considère la rotation r de centre A qui transforme D en C .
 - (a) Déterminer l'image de B par r .
 - (b) Déterminer l'angle de la rotation r .
 - (c) Démontrer de deux manières différentes que G_2 est l'image de G_1 par r .
3. Soit C' l'image de C par r ; montrer que C est le symétrique de B par rapport à A .
4. I est le point d'intersection de (BE) et (CD) ; montrer que :
 - (a) $CD = BE$ et que $\text{mes}(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CD}}) = \frac{2\pi}{3}$.
 - (b) I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC .

Partie B :

Dans l'espace $\mathcal{E}$, on considère quatre points P, Q, R, S . On appelle J le barycentre du système de points pondérées $\{(P, 1); (R, 3)\}$ et K celui du système de points pondérés $\{(Q, 1); (S, 3)\}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{JK}$.
2. Montrer que si J et K sont confondus, alors P, Q, R et S sont coplanaires.
3. On suppose dans la suite que l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (P) et (P') sont deux plans, d'équations cartésiennes respectives : $x + y - z - 2 = 0$ et $x - 2y + z - 3 = 0$.
 - (a) Déterminer deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ respectivement normaux à (P) et (P') .
 - (b) Montrer que $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires.
 - (c) En déduire la position relative de (P) et (P') .