

Mathématiques

PROBATOIRE Série C

Session 2008



Exercice 1

Dans le plan orienté, on considère le carré ABCD de sens direct, de centre O et de côté 1 (unité : 35 mm). Soit G le barycentre des points (A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1).

- Montrer que G est le milieu du segment [OB].
 - Construire le point G.
- On désigne par (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que: $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 6$.
 - Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + \frac{3}{2}$.
 - En déduire la nature précise de (Γ) .
- Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2, et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On pose $f = h \circ r$.
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
 - Construire $A'B'C'D'$ et G' , image respectives du carré ABCD et de G par f.

Exercice 2

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 2$, $U_{n+1} = 2U_n + n - 1$ et $V_n = U_n + n$.

- Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
- Un animal mesure 2 cm à sa naissance. Sa taille à la fin de la $(n + 1)^{ième}$ semaine, diminuée de $(n - 1)$ centimètre est le double de celle qu'il avait à la fin de la $n^{ième}$ semaine.

Quelle est la mesure de la taille de cet animal à la fin de la dixième semaine ?

Exercice 3

On considère l'équation (E): $\sin 3x = -\sin 2x$.

- Résoudre l'équation (E) dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$, puis représenter ses solutions sur un cercle trigonométrique.
- Démontrer que $\sin 3x = \sin(4\cos^2 x - 1)$.

- (b) En déduire que l'équation (E) est équivalente à $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$.
- (c) Parmi les solutions trouvées pour (E) ; lesquelles sont aussi solutions de l'équation : $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$?
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $4t^2 + 2t - 1 = 0$.
- (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

Problème

Partie A :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2,0,0)$; $B(0,3,0)$ et $C(0,0,4)$.

- (a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
 - (b) Donner une représentation paramétrique du plan (ABC) .
 - (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. On considère le plan (Q) d'équation cartésienne $x - 2z - 2 = 0$.
- (a) Démontrer que les plans (ABC) et (Q) sont orthogonaux.
- (b) Déterminer une représentation paramétrique de leur intersection.

Partie B :

L'évolution de 1988 à 2004 du salaire d'un ouvrier est donnée dans le tableau suivant :

Numéro de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Salaire horaire moyen en Frs CFA : y_i	1650	1760	1930	2020	2220	2450	2530

- Représenter le nuage des points associé à la série double (x_i, y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal, ainsi que le point moyen G du nuage, puis ajuster à la règle ce nuage de points. On calculera les coordonnées de G .
- Donner une troncature d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire. Que peut-on conclure ?
- Déterminer l'équation de la droite de régression de y en fonction de x .
- En admettant que cette évolution se poursuive, donner une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en l'an 2010.

Partie C :

f est une fonction rationnelle dont la courbe de la fonction dérivée donnée ci-dessous admet la droite d'équation $x = -1$ comme axe de symétrie.

- Déduire de ce graphique :
 - Le domaine de définition de f .

- (b) Le sens de variation de f sur chacun des intervalles où elle est définie.
- (c) Les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
2. Démontrer que les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses α et $-\alpha - 2$ sont parallèles, α étant un réel distinct de -1 .
3. On suppose dans la suite que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a, b et c sont des nombres réels.
- (a) Déterminer a, b et c sachant que la courbe de f admet en 1 un extrémum égal à 0.
- (b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- (c) Dresser le tableau de variation de f .
- (d) Déterminer en justifiant votre réponse les équations des asymptotes à la courbe de f .
- (e) Tracer soigneusement la courbe de f .

