Mathématiques

PROBATOIRE Série C Session 2003

L'épreuve comporte deux exercices et un problème répartis sur trois pages

Exercice 1

On rappelle que si $(\mathcal{C})$et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles de centre respectifs Ω et Ω' et de rayons respectifs r et r', $(\mathcal{C})$et $(\mathcal{C}')$ ont deux points communs si et seulement si :

$$|r-r'| < \Omega\Omega' < r+r'.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le point B a pour coordonnées $(4;4)$: on note $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=0$. On note aussi $(\mathcal{C}')$ le cercle d'équation cartésienne $x^2+y^2-9x-4y+18=0$.

1. Écrire une équation cartésienne de$(\mathcal{C})$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.
2. Préciser le centre Ω' et le rayon r' de $(\mathcal{C}')$.
3. Démontrer que ces deux cercles sont sécants.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de ces deux cercles.

Exercice 2

Chacune des questions qui sont proposées est accompagnée de quatre réponses parmi lesquelles une seule est juste. Écrivez-la.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la distance du point $A(1;-2;3)$ au plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-4=0$ est égal à

(a) $\frac{13}{21}$ (b) $\frac{5}{\sqrt{21}}$ (c) $\frac{13}{\sqrt{21}}$ (d) $\sqrt{\frac{13}{21}}$

2. La suite de terme général $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ est :

   (a) croissante (b) décroissante (c) constante (d) ni croissante, ni décroissante.

3. Une urne contient 7 boules dont 3 noires. On tire successivement et avec remise 5 boules de cette urne. Le nombre de tirages contenant une seule boule noire est égal à :

(a) 243 (b) 3840 (c) 2401 (d) 1280.

4. Le système linéaire $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ x-y-z=-4 \\ x+4y-5z=-6 \end{cases}$ a pour unique solution :

(a) $(1;2;-3)$ (b) $(-1;5;-1)$ (c) $(1;2;3)$ (d) $(-1;-2;-3)$.

5. La fonction f définie sur $[-3;2]$ est donnée par son tableau de variation ci-dessous.

x	-3		0		2
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

La fonction g est telle que pour tout x de $[-3;2]$, $g'(x)=\frac{f(x)}{x^2}$.

(a) g est croissante sur $[-3;2]$;

(b) g est décroissante sur $[-3;2]$;

(c) g n'est pas monotone sur $[-3;2]$;

(d) g est constante sur $[-3;2]$.

6. À partir d'une enquête portant sur le nombre d'enfants de 200 familles d'un quartier, on a établi le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs	18	32	66	41	32	9	2
Effectif Cumulés Croissant	18	50	a	157	189	b	200

Les chiffres manquants a et b sont respectivement :

(a) 116 et 198 (b) 106 et 195 (c) 112 et 158 (d) 126 et 208.

7. On considère la suite géométrique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n=\sqrt{3}(1{,}01)^n$. On pose $S_n=\sum_{0}^{n} V_k$; alors S_n est égale à :

(a) $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}(1{,}01)^n}{0{,}01}$, (b) $\frac{-\sqrt{3}(1-(1{,}01)^n)}{0{,}01}$, (c) $\frac{-\sqrt{3}(1-(1{,}01)^{n+1})}{0{,}01}$, (d) $\frac{\sqrt{3}((1{,}01)^n-1)}{0{,}01}$

8. f est une application du plan vectoriel E_2 muni d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ dans lui-même. La matrice de f dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1{,}5 \end{pmatrix}$, un vecteur $\vec{u}$ du noyau de f est :

(a) $\vec{u}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$, (b) $\vec{u}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ (c) $\vec{u}=-\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$ (d) $\vec{u}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

Problème

Partie A :

1. Déterminer les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{11\pi}{6}$.
2. En déduire que $cos^2\frac{11\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ et que $sin^2\frac{11\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

3. Déterminer les valeurs exactes de $cos\frac{11\pi}{12}$ et $sin\frac{11\pi}{12}$ en justifiant vos réponses.
4. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin x - \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos x = -\sqrt{2}$

Partie B :

On considère la fonction f définie pour tout x différent de -1 par $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

1. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis à gauche et à droite de -1.

   (b) Calculer la dérivée de f.

   (c) Dresser le tableau de variation de f.
2. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

   (b) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$de f dans un repère orthonormé admet une asymptote oblique dont on précisera, suivant les valeurs de x, la position par rapport à $(\mathcal{C})$.

(a) Tracer $(\mathcal{C})$.

Partie C

Dans le plan orienté, on considère un losange ABDC tel que le triangle ABC soit équilatéral direct (c'est-à-dire qu'une mesure en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ est $\frac{\pi}{3}$).

On note O l'isobarycentre du triangle BCD et A' le symétrtique de A par rapport à B.

1. (a) Réaliser la figure.

   (b) Déterminer une mesure en radian de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC}})$ et$(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}})$.
2. Déterminer que O appartient à la médiatrice du segment $[A'A]$.
3. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme C en B et A en A' et déterminer son angle et son centre.