Mathématiques

PROBATOIRE Série C Session 2002

Exercice 1

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 4$; $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{2}{3}$; et la suite (V_n) par $V_n = U_n - 1$.

1. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de (U_n).
2.

(a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

(b) Calculer V_n et U_n en fonction de n.

(c) Calculer la valeur exacte de $S = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^9}\right)$.

Exercice 2

Chacune des questions qui sont proposées est accompagnée de quatre réponses parmi lesquelles une seule est juste, écrivez-la sur votre feuille sans autre justification.

1. Soit f la fonction telle que $f(x) = \tan 2x$; l'ensemble de définition de f est

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, (c) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ (d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Quatre garçons et deux filles veulent constituer un groupe de travail compose de deux garçons et une fille choisis au hasard; le nombre de groupes possibles est:

(a) 3 ; (b) 24 ; (c) 48 ; (d) 12 .

3. E est un plan vectoriel muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le plan (P) a pour équation cartésienne $x + 2y + z - 1 = 0$. Le plan parallèle à P et passant par $A(1; 1; 2)$ a pour équation :

(a) $x + 2y + z - 5 = 0$; (b) $x + 2y + z - 2 = 0$; (c) $x + 2y + z + 5 = 0$;
(d) $x + 2y + z - 1 = 0$.

5. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan ; (C) est le cercle de centre O et de rayon 2 et A le point de coordonnées $(1; \sqrt{3})$. La tangente à (C) au point A a pour équation :

(a) $x + \sqrt{3}y + 4 = 0$; (b) $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$; (c) $-x + \sqrt{3}y + 4 = 0$;
(d) $x + \sqrt{3y} - 4 = 0$.

Problème

Partie A :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère les points E, F, G et H respectivement sur les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que $AE = BF = CG = DH$. On note r la rotation de centre O qui transforme A en B.

1. (a) Réaliser la figure en prenant $AB = 5cm$ et $AE = 2cm$.

   (b) Déterminer l'angle de r en justifiant votre réponse.

   (c) Recopier et compléter le tableau de correspondance suivant

Objet	B	C	D	D	$[AB]$	E
Image r						

2.

(a) En utilisant la relation de Chasles ; démontrer que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{FG}$ est nul.

(b) Quelle est la nature exacte du quadrilatère $EFGH$? Justifier votre réponse.

(c) Déterminer l'aire du quadrilatère $EBFO$ en fonction de celle du carré $ABCD$.

Partie B :

On considère la fonction f de la variable réelle x définie dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x-3}$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans une repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. (a) Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$: $f(x) = \frac{x^2-9+9-5(x-3+3)+10}{x-3}$.

   (b) En déduire qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,

   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Vérifier que$(\mathcal{C})$possède un asymptote oblique (D) et donner en fonction de x les positions relatives de$(\mathcal{C})$ et (D).
4. Tracer $(\mathcal{C})$.
5. On note A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 2.

(a) Écrire une équation cartésienne de la tangente (D') à $(\mathcal{C})$ en A.

(b) Existe-t-il des points de $(\mathcal{C})$ en lesquels les tangentes à $(\mathcal{C})$ sont perpendiculaires à (D') ? Si oui déterminer leurs abscisses.