Mathématiques

PROBATOIRE Série C Session 2005

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre. ABC est un tiangle rectangle en C tel que $BC = 2$ et $AC = 3$; I est le barycentre du système $\{(A, 2); (B, 5); (C, -3)\}$. J est le point du plan tel que $\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

1. Montrer que le point J est un barycentre des points B et C affectés des coefficients que l'on déterminera.
2. Démontrer que les point A, I et J sont alignés.
3. (a) Placer les points I et J.

   (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (C) des points M du plan tels que $AM^2 + JM^2 = 35$.

(a) Tracer (C).

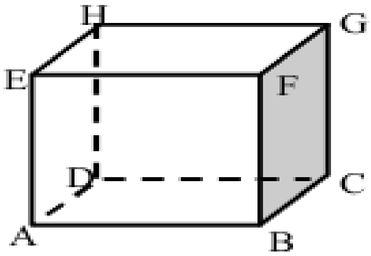
Exercice 2

1. Écrire $(1 + \sqrt{3})^2$ sous forme $a + b\sqrt{3}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I'): x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} < 0$.
3. Déduire dans $]-\pi, \pi[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) :

   $tan^2\alpha + (\sqrt{3} - 1)tan\alpha - \sqrt{3} < 0$.
4. Une porte est équipée d'une serrure à code comportant un dispositif muni des touches 1, 2, …,9 et les lettres A, B, C et D. Un code est formé de trois chiffres distincts puis de deux lettres non nécessairement distinctes. Combien de codes différents peut-on former ?

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube de centre O tel que $AB = 1$.



1. Justifier que les droites (GF) et (HC)sont orthogonales.
2. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)$.

(a) Déterminer les coordonnées des points G, F, H et C dans ce repère.

(b) Calculer $\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{HC}$. En déduire que les droites (GF) et (HC) sont orthogonales.

3. (a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère inscrite dans le cube. (elle est tangente à toutes les faces du cube).

   (b) Déterminer la nature, puis le volume de AHDCBG.

Problème

Partie A :

f est la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. (a) Calculer les limites de f à gauche de -2 ; à droite de -2 et en $+\infty$.

   (b) Étudier les variations de $f$sur $]-2;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
2. (a) Déterminer les coordonnées des points de rencontre de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et de la droite d'équation $y = x$.

   (b) Représenter graphiquement la partie de la courbe de f correspondant aux abscisses supérieures à -2 dans un repère orthonormé de plan. Unité sur les axes : $2\ cm$.
3. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie sur $]-2;+\infty[$ par : $g(x) = 2 - |f(x)|$.

(a) Donner un programme de construction de la courbe$(\mathcal{C}_g)$ de g à partir de celle de f.

(b) Tracer $(\mathcal{C}_g)$.

4. (U_n) est la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{U_n+1}{U_n+2}$ pour tout entier naturel n.

(a) Calculer U_1, U_2 et U_3.

(b) Construire sur l'axe des abscisses du repère les cinq premiers termes de (U_n).

(c) En déduire une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (U_n).

Partie B :

Le tableau ci-dessous indique la puissance x en chevaux cylindrée y (en cm^3)de huit voitures à moteur Diesel.

Numéro voiture	1	2	3	4	5	6	7	8
Puissance x	35	55	60	60	65	70	72	75
Cylindrée y	1000	1600	1800	1700	1900	2000	2100	2500

1.

(a) Représenter le nuage de la série $(x; y)$. (Choisir sur l'axe des abscisses 1 cm pour 10 chevaux et sur l'axe des ordonnées 2 cm pour 1000 cm^3).

(b) Le nuage ainsi représenté laisse-t-il entrevoir un ajustement linéaire ?

2. Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne des huit voitures.

3. Sachant que la covariance du couple $(x; y)$ vaut 4662.5 :

(a) Ecrire une équation cartésienne de la droite de régression de x en y.

(b) Donner une estimation au cheval près de la puissance d'un moteur de cylindrée 3500 cm^3.

Partie C :

On considère deux cercles (C)et(C') de même rayon, de centre respectifs O et O', sécants en deux points A et B. On considère la rotation r de centre A qui transforme O en O'.

1. Déterminer l'image de (C) par r.
2. On désigne respectivement par (C)et D les points diamétralement opposés à A sur (C) et (C').

(a) Montrer que $r(C) = D$.

(b) Montrer que les points B, C et D sont alignés.

3. Soit M un point de (C) autre que A et B. On pose $M' = r(M)$.

(a) Comparer les angles $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}})$et $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM'}})$.

(b) En déduire une construction simple du point M'.