Mathématiques

PROBATOIRE Série C — Session 2001

Exercice 1

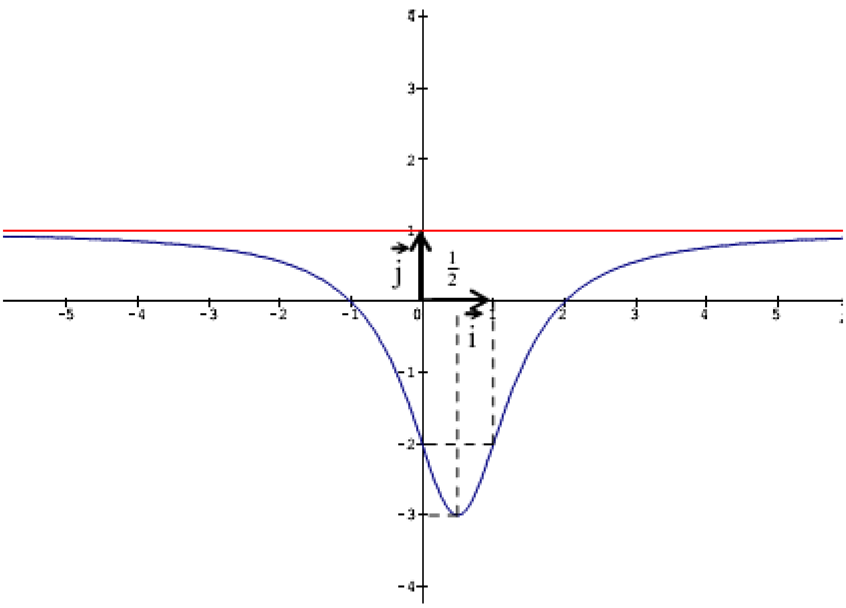
On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_n}{n}$$

1. Calculer $U_2; U_3$ et U_4.
2. Démontrer que (V_n) et une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
3. En déduire les expressions de V_n et U_n en fonction de n.
4. Calculer $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{59049}$.

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f une fonction rationnelle dont la courbe représentativité $(\mathcal{C})$est donnée ci-dessous.



1. Faire des conjectures sur :

(a) L'ensemble de définition de f.

(b) Limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Les asymptotes à $(\mathcal{C})$.

(d) En déduire le tableau de variation de f.

2. Quelles sont les solutions dans $\mathbb{R}$:

(a) Des équations $f(x) = 0$; $f(x) = 1$; $f(x) = 2$?

(b) Des inéquations $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq -2$?

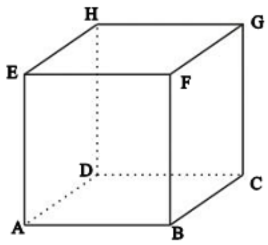
3. Tracer dans le même repère orthonormé la courbe représentative de la fonction g telle que $g(x) = -f(x)$

4. La fonction f est définie par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$; déterminer a, b, c et d.

Problème

Le problème comporte 2 parties A et B indépendantes

Partie A



La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

En utilisant le produit scalaire et l'égalité $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$,

1. Démontrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (CFH).

2. On suppose $AB = 1$ et on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$.

   Démontrer que $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

3. (a) Déterminer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{FH}$.

   Retrouver le résultat de la première question.

   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AG) et (CFH) et en déduire la distance du point A au plan (CFH).

Partie B

Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $\mathfrak{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon 1. On note $I(1,0)$, $J(0,1)$ et $K(-1,0)$. A est le milieu du segment $[OK]$; $\mathfrak{C}'$ désigne le cercle de centre A passant par J.

1. (a) Écrire une équation cartésienne de $\mathfrak{C}'$.

   (b) $\mathfrak{C}'$ rencontre l'axe des abscisses en 2 points dont l'un noté B a une abscisse positive X_B. Déterminer X_B.

2. On désigne par C le milieu du segment $[OB]$, la perpendiculaire en C à l'axe des abscisses coupe le cercle $\mathfrak{C}$ en deux points dont l'un noté M, a une ordonnée positive. On pose $\alpha = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

(a) Démontrer que $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(b) En déduire $\sin \alpha$, $\cos 2\alpha$ et $\cos 3\alpha$

3.

(a) Résoudre dans l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$ l'équation $\cos 2x = \cos 3x$.

(b) En déduire la valeur exacte de α.