

Mathématiques

PROBATOIRE Série C

Session 2000



Exercice 1

La fonction f est définie pour tout réel x différent de -3 par $f(x) = \frac{5x+3}{x+3}$.

1.
 - (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, à gauche et à droite de -3 .
 - (b) Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation.
 - (c) Écrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 0.
2. Tracer la courbe f dans le repère orthonormé du plan.
3. La suite (U_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3} \end{cases}$ et la suite (V_n) par $V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1}$ (on admettra que les suites (U_n) et (V_n) sont bien définies).
 - (a) Calculer U_1 et U_2 .
 - (b) Déterminons que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (c) Calculer V_n , puis U_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit α un réel tel que $\tan \alpha$, $\tan 2\alpha$ et $1 - \tan^2 \alpha$ soient définies.

1. Démontre que $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

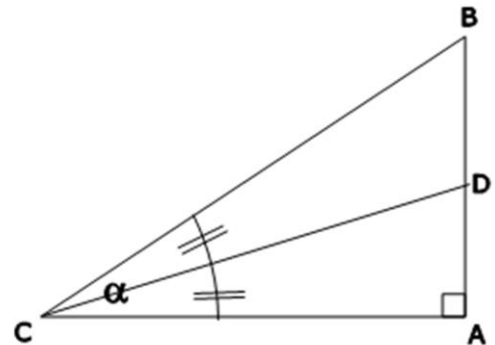
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A .

(CD) est la bissectrice de l'angle BCA .

On donne en centimètres $AD = 33$; $AC = 99$.

On pose $BD = x$ et $\alpha = \text{mes} \widehat{BCA}$.

2.
 - (a) Calculer $\tan \alpha$ en fonction de x .
 - (b) En déduire la valeur de x .



Problème

Partie A

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ soit égale à $\frac{\pi}{2}$. On note :

- G la barycentre du système $(A, 2); (B, -1); (C, 1)$;
 - (C) l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{AD}{2}$;
 - f l'application du plan qui a tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
1. Démontrer que G est le milieu de $[AD]$. Construire G .
 2. (a) Démontrer que pour tout M de (C) , $MG = \frac{AD}{4}$.
(b) En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 3. (a) Démontrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.
(b) En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
(c) Construire (C) , puis déterminer et construire l'image (C') de (C) par f .

Partie B

Dans l'espace on considère la pyramide régulière ABCDE dont la base est le carré ABCD et la hauteur (EO) , la droite perpendiculaire en O au plan (ABC) . I et J désignent les milieux respectifs des arêtes $[BE]$ et $[DE]$. Les faces sont des triangles équilatéraux.

On suppose dans cette partie $AB = 4 \text{ cm}$.

4. Démontrer que les droites (IJ) et (EO) sont perpendiculaires.
5. (a) Dessiner en dimensions réelles le triangle DEB .
(b) Calculer la valeur exacte de EO .
(c) Calculer l'aire latérale de la pyramide.
6. On réalise la section de cette pyramide par le plan (DEB) . Déterminer la nature et le volume du solide $DBCE$.