REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail- Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace- Work –Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION

UNIVERSITE DE DOUALA
Institut Universitaire de Technologie
IUT

UNIVERSITY OF DOUALA
University Institute of Technology
UIT

CONCOURS D'ENTREE EN 3ᵉ ANNEE
Session de Octobre 2013

Filières : PFTI et PFTIN **Durée : 3 heures**
Epreuve : Mathématiques

I- (4points) Soit la série numérique $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1) (2pts) Comparer cette série à la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ et dire si elle converge ou ne converge pas.
2) (2pts) Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

II- (7points) Soit l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$. Soit $y(x)=\sum a_n x^n$ la solution de cette équation différentielle.

1) (2pts) Etablir une relation récurrente entre a_{n+1} et a_n
2) (1pt) En déduire l'expression de a_n
3) (2pts) Calculer le rayon de convergence de la série ainsi obtenue.
4) (2pts) Exprimer cette solution en fonction des fonctions cos et ch.

III- (6points) Soit $D = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ et la fonction : $f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2 y)}$

a) (2pts) Calculer l'intégrale double : $\iint_D f(x, y) dxdy$ en intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y
b) (2pts) En permutant les intégrations, montrer que : $\iint_D f(x, y) dxdy = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1} dx$
c) (2pts) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2-1} dx$

IV- (3points) Soit le système différentiel $x' = y, y' = z, z' = 0$. Résoudre ce système et en déduire la valeur de $\exp(tN)$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Correction

SOLUTIONNAIRE

I

1. On a facilement : $0 \leq \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^3}$. La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente car c'est le terme général de la série de Riemann avec la bonne condition $(3 > 1)$.

2. Calculons sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. On a en décomposant en éléments simples:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

Posons $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ alors on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - (S_N - 1 + \tfrac{1}{N+1}) + \tfrac{1}{2}(S_N - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{N+1} + \tfrac{1}{N+2}) \\
&= S_N(\tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2}) + 1 - \tfrac{1}{N+1} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{N+1} + \tfrac{1}{N+2} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{N+2} \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{N+2}
\end{aligned}$$

Ainsi $S = \frac{1}{4}$

II On a l'équation différentielle:

$$4xy'' + 2y' - y = 0$$

et $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sa solution développable en série entière.

1. En substituant cette série dans l'équation, on obtient:

$$\begin{aligned}
4xy'' + 2y' - y &= 4\sum n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum 2na_n x^{n-1} - \sum a_n x^n \\
&= \sum(4n(n-1) + 2n)a_n x^{n-1} - \sum a_n x^n \\
&= \sum(2(n+1)(2n+2)a_{n+1} - a_n)x^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où

$$2(n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$$

2.

$$a_n = \frac{1}{(2n)!}a_0$$

3. En appliquant le critère de D'Alembert, on obtient $R = +\infty$

4. On a: $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = a_0 \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} & \text{si } x \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ainsi on obtient:

$$y(x) = a_0 \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

0,5 x 4

III Ceci est une intégrale impropre qui converge, on a donc:

1. $$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{M,N\to+\infty}\int_0^M dy\int_0^N \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx$$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M dy \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{dy}{1+y}\lim_{N\to+\infty}\int_0^N\frac{dx}{1+x^2y}$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{dy}{(\sqrt{y})(1+y)}\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N\sqrt{y}}\frac{dz}{1+z^2}$$
$$= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{dy}{(\sqrt{y})(1+y)}$$
$$= \frac{\pi^2}{2}$$

Ainsi

$$\int_D f(x,y)dxdy = \frac{\pi^2}{2}.$$

2 pts

2. $$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} dx\left(\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)}\right)$$
$$= \int_0^{+\infty} dx\left(\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1-x^2}\int_0^M\frac{dy}{(1+y)} + \frac{x^2}{x^2-1}\int_0^M\frac{dy}{1+x^2y}\right)$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}dx$$

D'où

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}dx.$$

2 pts

3. Or $\int_D f(x,y)dxdy = \frac{\pi^2}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{2}$$

2 pts

IV Soit le système $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 0 \end{cases}$. En intégrant de bas en haut, on obtient facilement la solution:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x = \frac{1}{2}ct^2 + bt + a \\ y = ct + b \\ z = c \end{pmatrix}$$

Soit

2 pts

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On voit que $X'(t) = NX$ dont la solution générale est donnée par $X(t) = \exp(tN)X_0$ avec X_0 un vecteur constant. Alors par unicité de solution, il vient que

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 pts