

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail - Patrie
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR
UNIVERSITE DE DOUALA
Institut Universitaire de Technologie
IUT

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace- Work -Fatherland
MINISTRY OF HIGHER
EDUCATION
UNIVERSITY OF DOUALA
University Institute of Technology
UIT

CONCOURS D'ENTREE EN 3^e ANNEE - THIRD YEAR ENTRANCE EXAMINATION

Session de Octobre 2012 - the October 2012 Session

Filières (speciality) : PFTI et PFTIN
Epreuve de (paper) Mathématiques / Mathematics

Durée (time) : 3 heures (hours)

EXERCICE 1 : 3,5 points

On cherche à déterminer la fonction causale $f(t)$, dont l'image par transformation de Laplace est :

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + \sqrt{3})^2}$$

1°/ Déterminer la fonction $g(t)$ qui a pour transformation de Laplace $G(p) = \frac{F(p)}{p}$

2°/ Sachant que $\int_0^t h(u) du$ a pour transformation de Laplace $\frac{H(p)}{p}$, en déduire $f(t)$.

3°/ Sachant que $\int_0^t h(t-u) z(u) du$ a pour transformation de Laplace $H(p) \times Z(p)$, retrouver le résultat précédent.

EXERCICE 2 : 4 points

Une variable aléatoire discrète X est à valeurs entière et sa probabilité de prendre une valeur entière k est donnée par $P(X = k) = \frac{\alpha}{k!}$, α étant un réel positif.

1°/ Calculer la valeur du paramètre α .

2°/ Calculer les probabilités $P(X > 0)$ et $P(1 < X \leq 4)$

3°/ Calculer l'espérance mathématique de X .

4°/ Calculer l'espérance mathématique de $Z = X(X-1)$.

5°/ En déduire la variance et l'écart-type de X .

Rappel ::
$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

EXERCICE 3 : 5 points

1°/ Calculer l'intégrale $I_n = \int_0^\pi x(\pi - x) \cos(2nx) dx$ où n est un entier non nul.

2°/ On considère la fonction numérique f périodique de période $T = \pi$ et définie par :

$$f(x) = x(\pi - x) \text{ pour } 0 \leq x \leq \pi$$

a) Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) Exprimer la série de Fourier de f .

c) On admet que cette série de Fourier converge. Ecrire l'égalité correspondante.

3°/ Justifier la convergence des séries numériques de termes généraux $U_n = \frac{1}{n^2}$ et $V_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ puis en déduire leurs sommes respectives à l'aide de la question 2°/c).

EXERCICE 4 : 4 points

1°/ On considère l'équation différentielle suivante :

$$\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \theta y(x) = x^2 + 3x + 1 \quad \alpha, \beta \text{ et } \theta \text{ sont des constantes réelles.}$$

a) Déterminer α , β et θ pour que la fonction $h(x) = x^2 - 3x + 2$ soit solution de cette équation.

b) En déduire la solution générale de cette équation.

2°/ Calculer chacune des intégrales suivantes et dire si elle est convergente ou divergente :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad J = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx \quad K = \int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx$$

EXERCICE 5 : 3,5 points

On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ α étant un réel non nul.

1°/ Pour quelles valeurs de α cette matrice est régulière.

2°/ Dans le cas où cette matrice est inversible, exprimer sa matrice inverse.

3°/ Que constate-t-on ?

DONNEES : $TL(\cos \omega t) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

$$TL(\sin \omega t) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$TL(t \cos \omega t) = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

$$TL(t \sin \omega t) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Exercice 1 : 2012

Chercher $F(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + \sqrt{3})^2}$

Déterminons $g(t) \xrightarrow{TL} g(p) = \frac{F(p)}{p}$

$$g(t) = \frac{1}{2} \sqrt[4]{3} t \sin^4 \sqrt[4]{3} t$$

Sachant que $\int_0^t h(u) du \xrightarrow{TL} \frac{H(p)}{p}$
déduissons $f(t)$

$$\int_0^t f(u) du = \frac{F(p)}{p}$$

$$TL \int_0^t f(u) du = TL [g(t)]$$

$$\int_0^t f(u) du = g(t)$$

$$[F(u)]_0^t = g(t) \Rightarrow F(t) - F(0) = g(t)$$

$$F(t) = g(t) + F(0)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \sin^4 \sqrt[4]{3} t + \frac{1}{2} t \cos^4 \sqrt[4]{3} t$$

$$TL \left[\int_0^t h(t-u) x Z u du \right] = H(p) x Z(p)$$

on. Soit $q \quad TL \left[\int_0^t h(u) \right] = \int_0^t h(u) e^{-pt} du$

$$TL \left[\int_0^t h(t-u) Z u du \right] = \int_0^t [h(t-u) Z u du] e^{ktu}$$

Possion $K = t - u \Rightarrow t = k + u$
 $\int_0^t Z u \left[\int_0^t h(u) e^{-pk - pu} dk \right] du$

Exercice 3 : 2012

1) Calculer $I_n = \int_0^\pi x(\pi - x) \cos(2nx) dx$
n entier naturel non nul

Intégration par parties;

Possion. $U = x(\pi - x) \Rightarrow U' = \pi - 2x$
 $= \pi x - x^2$

$$V' = \cos(2nx) \Rightarrow V = \frac{1}{2n} \sin(2nx)$$

$$I_n = \frac{1}{2n} \left[\frac{\pi x - x^2}{2n} \sin(2nx) \right]_0^\pi - \frac{1}{2n} \int_0^\pi (\pi - 2x) \sin(2nx) dx$$

$$I_n = -\frac{1}{2n} \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} \right) - \frac{1}{2n^2} \left[\sin(2nx) \right]_0^\pi$$

2) a) On considère.

$$f(x) = x(\pi - x) \text{ pair } 0 \leq x \leq \pi$$

$$f(-x + \pi) = (-x + \pi)(\pi - (-x + \pi))$$

$$f(-x + \pi) = x(-x + \pi)$$

$$f(-x + \pi) = f(x) \text{ Do } f \text{ est paire}$$

b) Expression de la série de Fourier
on a $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) dx$$

$$a_{0/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3\pi^3}{6} - \frac{2\pi^3}{6} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{6} \right)$$

$$a_{0/2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx) dx \quad \text{I}_n$$

$$= \frac{2}{\pi} \text{I}_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n^2} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

Donc la série se écrit.

$$S(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nx)$$

c) On admet q la série converge donc on peut écrire.

$$f(x) = S(x) \Leftrightarrow x(\pi+x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nx)$$

3° Justifier la convergence des séries

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge comme série de Riemann avec $\alpha = 2$

$$\text{Pour } x=0 / f(x)=0 \quad \cos(2nx)=1$$

$$f(0)=0 \Leftrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

Démonstrons q $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

$$|v_n| \searrow |v_{n+1}|$$

On voit q

$$n \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{(-1)^n}{n^2} \geq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| \geq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \right|$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante et par conséquent converge

$$\text{Pour } x = \frac{\pi}{2} \quad f(x) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\cos(2nx) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

On a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{Soit } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

EXERCICE 4: 2012.

1/ On considère l'eqn diff

a) Déterminons α, β et γ , $h(x) = x^2 - 3x + 2$.
soit $y = h(x)$

$$h(x) \text{ solution} \Rightarrow \alpha h''(x) + \beta h'(x) + \gamma h(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$\begin{cases} h'(x) = 2x - 3 \\ h''(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{ainsi: } 2\alpha + \beta(2x - 3) + \gamma(x^2 - 3x + 2) = x^2 - 3x + 1$$

$$2\alpha + 2\beta x - 3\beta + \gamma x^2 - 3\gamma x + 2\gamma = x^2 - 3x + 1$$

$$0x^2 + (2\beta - 3\gamma)x - 3\beta + 2\gamma + 2\alpha = x^2 - 3x + 1$$

$$= x^2 + 3x + 1$$

$$\text{Par identification: } \begin{cases} \gamma = 1 \\ 2\beta - 3\gamma = -3 \\ -3\beta + 2\gamma + 2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

b) Solution générale

$$4y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^2 - 3x + 1$$

c) Cherchons la solution particulière

$$4y''(x) + 3y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow 4r^2 + 3r + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \times 4 = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$r_1 = \frac{-3 - i\sqrt{7}}{8}, r_2 = \frac{-3 + i\sqrt{7}}{8}$$

www.touslesconcours.info

$$y(x) = e^{\frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{8}x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{8}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{8}x\right) \right), A, B \in \mathbb{R}$$

ainsi, la soln générale est:

$$y(x) = e^{\frac{-3}{8}x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{8}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{8}x\right) \right) + x^2 - 3x + 2, (A, B \in \mathbb{R})$$

2° Calculer chacun des Intégrals suivants:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \text{ (divergent)}$$

$$J = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx = \left[\ln(\ln x) \right]_0^1 = \infty \text{ (divergente)}$$

$$K = \ln(\ln e) - \ln(\ln 0) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1) Matrice régulière $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha^2 + 2) - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2$$

$$\det A = \alpha^3 - 3\alpha + 2 \quad ; \quad \det A \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha + 2 \neq 0$$

$\alpha = 1$ est solution

$$\begin{array}{r} \alpha^3 - 3\alpha + 2 \quad | \quad \alpha - 1 \\ - \alpha^3 + \alpha^2 \\ \hline \alpha^2 - 3\alpha + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ - \alpha^2 + \alpha \\ \hline -2\alpha + 2 \\ + 2\alpha - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2)$$

$$\alpha - 1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$$

Donc

$$\boxed{\alpha \neq 1 \quad \text{ou} \quad \alpha \neq -2}$$

$$\alpha_1 \neq \frac{-1-3}{2} \neq -2$$

$$\alpha_2 \neq \frac{-1+3}{2} \neq 1$$

ans:

$$A^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} (\alpha-1)(\alpha+1) & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & (\alpha-1)(\alpha+1) & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & (\alpha-1)(\alpha+1) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+1}{\alpha+2} & -\frac{1}{\alpha+2} & -\frac{1}{\alpha+2} \\ -\frac{1}{\alpha+2} & \frac{\alpha+1}{\alpha+2} & -\frac{1}{\alpha+2} \\ -\frac{1}{\alpha+2} & -\frac{1}{\alpha+2} & \frac{\alpha+1}{\alpha+2} \end{pmatrix}$$

3°) Que constate-t-on?

On constate que la matrice A est symétrique.