REPUBIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail – Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE DOUALA
Institut Universitaire de technologie - IUT



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace- Work-Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
UNIVERSITY OF DOUALA
University Institute of Technology - UIT

CONCOURS D'ENTREE EN 3e ANNEE - THIRD YEAR ENTRANCE EXAMINATION
Session d'octobre 2010 – October 2010 session

# Maths PFTI/GI – English version

A - Let E be the vector space $R^3$ and $\epsilon=(e_1,e_2,e_3)$ a basis of E. Let f be the endomorphism of E whose matrix with respect to $\epsilon$ is $A=\begin{pmatrix} 5 & 15 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \\ -6 & -19 & 4 \end{pmatrix}$.

Set B=A-I (I the identity matrix of order 3). Let g be the endomorphism of E whose matrix with respect to $\epsilon$ is B.

1) (2 marks) Compute the eigenvalues of f. Is f diagonalisable ? Trigonalisable ?
2) (2 pts) Compute $B^2$ and $B^3$ furthemore determine Ker(g) and Ker ($g^2$) and compare these sets.
Let $a \in E$, $a \notin Ker(g^2)$. Show that the faimily $\{g^2(a), g(a), a\}$ is a basis of E.Write the matrix J of g with respect to this basis.
3) (2 pts) Let $a=e_3$ and set $a_3=e_3$, $a_2=g(a_3)$ and $a_1=g(a_2)$. Write the matrix of tranfer P from the basis $\epsilon$ to the basis $(a_1, a_2, a_3)$ and compute its inverse $P^{-1}$. Give the relation between the three matrices B, J and P.
4) (2 pts) Recall that $e^M=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{M^n}{n!}$ and that the solution to the system of differential equation $X'=MX$ is given by: $X(t)=e^{tM}K$ where $K$ is a constant vector. Compute the matrix $e^{tB}$ and solve the differential system $X'=BX$.

B - Consider the sequence $(u_n)$ given by the relation : $2u_n-3u_{n-1}+u_{n-2}=0$ and $u_0$ and $u_1$ are given.

1) (1pt) Set , for each integer greater than 1, $v_n=u_n-u_{n-1}$. Show that $v_n=\frac{u_1-u_0}{2^{n-1}}$.
2) (1pt) Deduce that $(u_n)$ is convergent and give its limit.

C - 1) (2pts) For $\alpha \in R$, solve the equation in the complex field C : $z^2-2cos(\alpha)z+1=0$. Deduce the trigonometric form of the solutions to the following equation :$z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1=0$, where n is an integer different from 0.

2) Let $P_\alpha(z)=z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1$.

a) (2pts) Justify the following aquality $P_\alpha$ : $P_\alpha(z)=\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)z+1\right)\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)z+1\right)\ldots\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)z+1\right)$.

b) (2pts) Compute $P_\alpha(1)$, and deduce the following equality : $sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\ldots sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4^{n-1}}$.

3) For $\alpha \in ]0,\pi[$, and $n>1$, set: $H_n(\alpha)=\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) (1pt) Show that $\forall\alpha$ non non zero, : $2^{n-1}\, H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

b) (1pt) Find out the limit of $H_n(\alpha)$ when $\alpha$ goes to 0 ?

c) (2pts) Deduce the value of , for all integer n>1, : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$.

## Maths PFTI/GI – Version française

A - On note E l'espace vectoriel $R^3$ et $\epsilon=(e_1,e_2,e_3)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\epsilon$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \\ -6 & -19 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose B=A-I (I la matrice identité d'ordre 3). On note g l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\epsilon$ est B.

1) (2 pts) Calculer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?
2) (2 pts) Calculer $B^2$, $B^3$ puis déterminer Ker(g) et Ker ($g^2$) et les comparer. Soit $a \in E, a \notin Ker(g^2)$. Montrer que la famille $\{g^2(a), g(a), a\}$ forme une base de E. Ecrire la matrice J de g dans cette base.
3) (2 pts) On choisit $a=e_3$ et on pose $a_3=e_3$, $a_2=g(a_3)$ et $a_1=g(a_2)$. Ecrire la matrice de passage P de la base $\epsilon$ à la base $(a_1, a_2, a_3)$ et déterminer $P^{-1}$. Donner la relation entre B, J et P.
4) (2 pts) En admettant que $e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$ et que la solution générale du système d'équation $X' = MX$ est donnée par $X(t) = e^{tM}K$ où $K$ est un vecteur constant. Calculer la matrice $e^{tB}$ et résoudre le système d'équation différentielle $X' = BX$.

B - Soit la suite $(u_n)$ définie par la relation récurrente linéaire à trois termes : $2u_n-3u_{n-1}+u_{n-2}=0$ et $u_0$ et $u_1$ donnés.

1) (1pt) On pose, pour chaque n supérieur ou égal à 1, $v_n = u_n - u_{n-1}$. Démontrer que $v_n = \frac{u_1-u_0}{2^{n-1}}$.
2) (1pt) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et donner sa limite.

C - 1) (2pts) Pour $\alpha \in R$, résoudre dans C l'équation : $z^2-2\cos(\alpha)z + 1 = 0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $z^{2n} - 2\cos(\alpha)\, z^n + 1 = 0$, où n est un entier naturel non nul.

2) Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)\, z^n + 1$.

a) (2pts) Justifier la factorisation suivante de $P_\alpha$ : $P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) z + 1\right) \ldots \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) z + 1\right)$.

b) (2pts) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire l'égalité : $sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right) sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right) \ldots sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$.

3) Pour $\alpha \in ]0,\pi[$, et pour tout entier $n > 1$, on pose : $H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

a) (1pt) Montrer que $\forall\alpha$ non nul, on a : $2^{n-1}\, H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

b) (1pt) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers 0 ?

c) (2pts) En déduire la valeur, pour tout entier naturel n>1, de : $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \ldots \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$