

PARTIE I

On désigne par j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. On considère le système (E)

$$x + y + z = a$$

$$x + jy + j^2z = b$$

$$x + j^2y + jz = c$$

Où a, b, c désignent trois nombre complexes donnés

1. Le nombre complexe j vérifie

a) $j^2 = 1$

b) $j^3 - 1 = 0$

c) $1 + j + j^2 = 0$

d) $1 - j - j^2 = 0$

2. les nombres x, y et z vérifient le système (E) sont tels que

a) $3y + (x + y)(1 + j + j^2) = a + bj^2 + cj$

b) $3y + (x + y)(1 + j + j^2) = a + b + c$

c) $3y + (x + y)(1 + j + j^2) = a + bj + cj^2$

d) $3x + (y + z)(1 + j + j^2) = a + bj^2 + cj$

3. Le système (E)

a) n'admet pas de solution

b) admet au moins deux solutions

c) admet une solution unique $x = (a + b + c)/3$, $y = (a + bj^2 + cj)/3$, $z = (a + bj + cj^2)/3$

d) admet une solution unique $x = (a + b + c)/3$, $y = (a + bj + cj^2)/3$, $z = (a + bj^2 + cj)/3$

4. Une condition nécessaire et suffisante pour que x, y, z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est

a) a, b, c réels

b) a, b, c complexes non réels

c) a réel et $b = c = 0$

d) a réel, b et c complexes conjugués car j^2 et $(-j)$ sont complexes conjugués

PARTIE II

n étant un entier et α un nombre réel non nul on pose

$$u_n = \int_0^\pi e^{\alpha x} \cos(nx) \, dx \quad \text{et}$$

$$v_n = \int_0^\pi e^{\alpha x} \sin(nx) \, dx$$

5. u_n vérifie pour tout n entier naturel

- $u_n = \left(\frac{1}{\alpha n} \left[e^{\alpha x} \sin(nx) \right]_0^\pi \right)$ pour n entier strictement positif et $u_0 = (e^{\alpha\pi} - 1)/\alpha$
- $u_n = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[e^{\alpha x} (\cos(nx) - (n/\alpha) \sin(\alpha x)) \right]_0^\pi + (n^2/\alpha^2) u_n$
- $u_n = \left(\frac{1}{(n^2 + \alpha^2)} \right) \left[e^{\alpha x} (\alpha \cos(nx) + n \sin(\alpha x)) \right]_0^\pi$
- $u_n = \left(\frac{1}{(n^2 - \alpha^2)} \right) \left((-1)^n e^{\alpha\pi} \alpha - \alpha \right)$

6. v_n satisfait, pour tout n entier naturel non nul

- $v_n = \left(\frac{1}{\alpha n} \right) \left[-e^{\alpha x} \cos(nx) \right]_0^\pi$
- $v_n = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \left[e^{\alpha x} (\sin(nx) - (n/\alpha) \cos(\alpha x)) \right]_0^\pi - (n^2/\alpha^2) v_n$
- $v_n = \left(\frac{1}{(n^2 - \alpha^2)} \right) \left[e^{\alpha x} (n \cos(nx) - \alpha \sin(\alpha x)) \right]_0^\pi$
- $v_n = \left(\frac{1}{(n^2 + \alpha^2)} \right) \left((-1)^{n+1} n e^{\alpha\pi} \alpha + n \right)$

7. La valeur absolue de u_n est, pour tout n entier naturel, majorée par

- $|\alpha|/(n^2 + \alpha^2)$
- $|\alpha| \left| (1 + e^{\alpha\pi}) / (n^2 - \alpha^2) \right|$

Et celle de v_n est majorée par

- $n(1 - e^{\alpha\pi})/(n^2 + \alpha^2)$
- $(1 + e^{\alpha\pi})/(n\alpha)$

8. La suite (v_{2k}) , k entier strictement positif, est équivalente à la suite de terme général

- $(1 - e^{\alpha\pi})/(2k)$
- $(1 + e^{\alpha\pi})/k$
- $1/(2k)$
- $1/k$

9.

-) les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant
-) les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente
-) la suite (u_n) converge vers 0
-) la suite (u_n) diverge car la suite de terme général $\cos nx$ n'admet pas de limite

PARTIE III

10. Dans les assertions suivantes, lesquelles sont vraies

a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos 5\theta = 16\cos^5 \theta + 5\cos \theta$

b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos 5\theta = 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta$

d) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

d) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos \frac{\pi}{10} \leq \cos \frac{\pi}{3}$

11. Soit le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère alors les points $I(1,2)$, $M(2,3)$ et $M'(\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$.

La similitude de centre I qui transforme M en M' est alors :

a) de rapport 2

b) d'angle $\frac{\pi}{4}$

c) de rapport $\frac{1}{2}$

d) d'angle $\frac{\pi}{3}$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0$ où θ est une inconnue réelle.

a) Si θ est solution alors $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^n$

b) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta) \left(\frac{\cos \theta}{2} \right)^n$

c) L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) Il n'y a pas de solution à cette équation

13. Soit une fonction réelle f de la variable t définie par :

$$\forall t > 0, f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$$

En utilisant f on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! a_n, f(a_n) = \frac{1}{n}.$$

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque f^{-1} est continue en 0

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 0$

d) $a_n \sim \frac{1}{n}$
 $n \rightarrow +\infty$

14. On cherche à comparer e^x avec son développement limité

- a) $\exists \theta \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$
 c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$ d) $\forall x \in \mathbb{R}^-, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

15. Soient a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variable réelles x et $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $a(x) \sim b(x)$.

- a) Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de α avec $\lim_{x \rightarrow \alpha} \varepsilon(x) = 0$ et
 $\ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1 + \varepsilon(x))$
 b) $\ln(a(x)) \sim \ln(b(x))$
 c) $\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x\right) \sim \ln(1+x)$ car $1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x \sim 1+x$
 d) $\ln(|\sin x|) \sim \ln(|x|)$ car $|\sin x| \sim |x|$ et que $|x| \neq 1$ sur un voisinage de 0.

16. Quelques limites en utilisant des équivalents

- a) Pour $\beta \neq 0$ et α réels $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$
 b) Pour $\beta \neq 0$ et α réels $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}$
 c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e$

17. Soit la fonction réelle f de variable réelle x définie par : $\forall x \neq 0; f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$

- a) f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non dérivable en 0
 b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2-x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}}$
 c) Sur $[1, +\infty[$, f ne possède qu'un extremum en 2, puisque $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$
 d) $f(x) = x$ admet deux et seulement deux solutions sur $\mathbb{R}$ car la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de f .

18. Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{x(x+2)}$

- a) Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ on a $\sqrt{x(x+2)} = x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$
- b) En $+\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote
- c) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote
- d) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ comme asymptote et la courbe est au-dessus de son asymptote.

19. On considère P un polynôme non nul tel que $P(X^2) - P(X+1)P(X) = 0$

- a) Si a est une racine de P , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, a^{2^n} est encore une racine de P
- b) Si a est une racine de P , $\forall n \in \mathbb{N}$, a^{2^n} est encore une racine de P
- c) Si a est une racine de P , il existe p tel que $a = a^p$
- d) Les racines de P sont des racines de l'unité

20. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $\forall k \in [0, n], a_k \in \mathbb{Z}$

- a) Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux et tels que $\frac{p}{q}$ est racine de P , p divise a_0 et q divise a_n
- b) Si $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ admet une racine rationnelle, c'est nécessairement $1, 5, \frac{1}{5}$ ou $\frac{5}{2}$
- c) $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ admet une racine rationnelle
- d) Si $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $\forall k \in [1, n-1], a_k \in \mathbb{Z}$ alors P possède une racine rationnelle, elle sera entière.

21. Si $c > 0$, on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ où } f \text{ est une fonction de } \mathbb{R}^2 \text{ à valeurs réelles admettant des dérivées partielles}$$

secondes. On posera $u(x, y) = x + cy$ et $v(x, y) = x - cy$. On notera

$$g(x(u, v)) = f(x(u, v), y(u, v))$$

- a) $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + c \frac{\partial f}{\partial y}$
- b) $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}$
- c) $\frac{\partial g}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4c^2} \left[c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$
- d) $(x, y) \mapsto e^{x \cosh(cy)} + 2$ est une solution de (E)

22. Si A est une matrice carrée à coefficients réels on définira l'exponentielle de la matrice A comme

étant $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$ si cette limite a un sens.

- a) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}$
- b) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas définie car $2 > 1$
- c) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^3 & e^{-1} \\ e^{-1} & e^3 \end{pmatrix}$
- d) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = e^3 \begin{pmatrix} ch(1) & -sh(1) \\ -sh(1) & ch(1) \end{pmatrix}$

23. On considère le lieu des points d'affixe z tels que z , z^2 et z^3 soient les affixes de trois points alignés. On note H cet ensemble de points et H_c l'ensemble de leurs affixes.

a) $z \in H_c \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ ou $z^3 + z^2 + z$ est imaginaire pur

b) $\text{Im}(z^3 + z^2 + z) = 3(\text{Re}(z))^2 - (\text{Im}(z))^2 + 2\text{Re}(z) + 1$

c) H est une hyperbole équilatère centrée en $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des

imaginaires, de demi grand axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$

d) H contient une hyperbole centrée en $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires,

de demi axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et dont les asymptotes ont comme coefficients directeurs $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

24. Racines multiples

a) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple car $P_n' = P_{n-1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ est unique polynôme vérifiant $P_n - P_n' = \frac{X^n}{n!}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X^n - n$ admet 1 comme racine double

d) Si m est divisible par n , alors $\forall a \in \mathbb{C}$, $X^m - a^m$ est divisible par $X^n - a^n$

25. L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'espace associé à E est rapporté à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite de E dont la représentation paramétrique est donnée par $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+t \end{cases}$

a) Les coordonnées du point symétrique de $M(a, b, c)$ par rapport à D sont

$$\left(1 + \frac{a-2b+c}{6}, 1 - \frac{a-2b+c}{3}, 1 + \frac{a-2b+c}{6}\right)$$

b) Les coordonnées du point symétrique de $M(a, b, c)$ par rapport à D sont $\left(\frac{6-2a-2b+c}{3}, \frac{6-2a+b-2c}{3}, \frac{6-2a-2b+c}{6} \right)$

c) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

d) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour équations cartésiennes :
$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

26. Soit $n \in \mathbb{N}$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

a) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t) dt$$

b) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a, b]$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t) dt$$

c) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{n!} h^{(n)}(t) dt$$

d) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a, b]$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{n!} h^{(n)}(t) dt$$

27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la moyenne appliqué au reste intégral de la question précédente permet d'écrire :

a) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, $\exists c \in]a, b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(c)$$

b) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a, b]$, $\exists c \in]a, b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(c)$$

c) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, $\exists c \in]a, b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^n}{n!} h^{(n)}(c)$$

d) Pour une fonction h , n fois dérivable sur un segment $[a, b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a, b]$, $\exists c \in]a, b[$

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^n}{n!} h^{(n)}(c)$$

28. On peut déduire de la question précédente

a) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}, e^X = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} + \frac{X^n}{n!} e^c$

b) $\forall X \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, e^X = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} + \frac{X^n}{n!} e^c$

c) $\forall X \in \mathbb{R}, e^X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$

d) $e^X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ mais seulement si $|X| \leq 1$

29. On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \int_0^x 3^{-[t]} dt$

où $[t]$ désigne la partie entière du réel t .

a) f Est définie sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto 3^{-[x]}$ admet une limite à droite et à gauche en tout point.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 3 \frac{1-3^{-n}}{2}$

c) Pour montrer que f admet une limite en $+\infty$, il est suffisant de montrer que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

d) f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée par $\frac{1}{e \ln 3}$. Donc elle admet une limite finie qui est la même que la limite de $(f(n))_{n \in \mathbb{N}} : \frac{3}{2}$

30. On cherche à déterminer les fonctions g de la classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant :

$$(P) \forall x > 0, g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

a) Si g vérifie (P) , alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $x^2 g'' = g$

b) Comme $x > 0$, on peut poser $x = e^t$ et si $h(t) = g(x(t))$ alors $h'' - h' + h = 0$

c) Les fonctions $g : x \mapsto \sqrt{x} \left[A \cos(\sqrt{3} \ln x) + B \sin(\sqrt{3} \ln x) \right]$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, vérifient (P)

d) Comme l'équation différentielle (P) est du second ordre et homogène, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de 2.