Université de Yaoundé I

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

Concours d'entrée en 3^{ème} Année - session de Septembre 2007

Epreuve de mathématiques (Durée : 3 heures)

N.B : Les parties A à I ci-après sont indépendantes

A - Esquisser, dans l'espace muni d'un repère orthonormé (o, i, j, k) l'ensemble ε des points

$$M \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \text{ vérifiant : } -3 \leq x \leq 3, |y| = x^2 + 2 \text{ et } 0 \leq z \leq 5 \dots\dots\dots .5 \text{ points}$$

B - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(e^{-2x} - \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} \right) \dots\dots\dots 2 \text{ points}$

C - Soient $J_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et $J_2 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

- 1- les intégrales J_1 et J_2 sont-elles convergentes ?
- 2- Sans calculer les valeurs respectives de ces deux intégrales, montrer que : $J_1 = 2J_2$
- 3- On pose $J_3 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (x^2 + y^2) e^{-x^2-y^2} dx dy$, $J_4 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy$
 - a) Calculer la valeur de J_3 , et en déduire celle de J_4
 - b) En déduire les valeurs de respectives J_1 et J_2 11 points

D - On considère l'équation différentielle : $y''+6y'+9y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (E)

Dans (E), on pose : $y = e^{-3x}u$

- 1- Déduire, de (E), une équation différentielle (E₁) satisfaite par la fonction u
- 2- Résoudre (E₁), puis (E).....6 points

Epreuves et corrections du concours d'entrée en 3ème année ENSP

E – Soit X , une variable aléatoire réelle suivant la loi de poisson de para mètre $\lambda > 0$.
Calculer l'espérance et la variance de X4 points

F- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, est dite harmonique sur Ω lorsque : $\Delta f = 0$ sur Ω .
Supposons alors f harmonique et 3 fois continûment différentiable sur Ω . La fonction
 $\varphi = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ est-elle aussi harmonique sur Ω 2 points

G – 1- Trouver les valeurs du réel a pour lesquelles la matrice suivante est inversible

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1-a \\ a & 2 & a \\ 1-a & a & 1 \end{pmatrix}$$

2- Discuter la valeur du rang de M suivant les valeurs du réel a 6 points

H - Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note $M_3(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 et à coefficients dans $\mathbb{R}$

- 1- Soit la matrice B telle que: $A = B - I_3$. Calculer $B^n \forall n \in \mathbb{N}$
- 2- En déduire A^n en fonction de I_3 et de B
- 3- Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, toutes les matrices A^n appartiennent à un sous-espace vectoriel H de dimension 2 de $M_3(\mathbb{R})$, et dont on précisera une base B , ainsi que les coordonnées de A^n dans cette base.....8 points

I- Soient dans $\mathbb{R}[x]$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficient réels, les trois fonctions :

$$P_1(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3, \quad P_2(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4, \quad P_3(x) = 3x^3 + 8x^2 - 8x + 7$$

- 1- Les fonctions P_1, P_2 et P_3 forment-elles un système libre de $\mathbb{R}[x]$?
- 2- Trouver une base et la dimension du sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}[x]$ engendré par (P_1, P_2, P_3)
.....6 points

FIN