CORRECTION PHYSIQUES 2013

Exercice 1

1. Par définition, la trajectoire d'un point situé sur un cercle roulant sans glisser est une cycloïde donc la trajectoire du point M est une cycloïde.

   Soit l'angle $\theta = (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IJ})$, les coordonnées (x,y) de M sont données par :
   $$\begin{cases} x = OJ - BI \\ y = JI + IB' \end{cases}$$

A l'instant initial M et I sont en O, on peut approximativement déduire que $\overline{OJ} = \widehat{MJ} = r\theta$.

En considérant le triangle IBM, $\cos\hat{I} = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{BI}{r} \rightarrow BI = r\sin\theta$ et le triangle IB'M, $\cos\hat{I} = \cos(\pi - \theta) = \frac{B'I}{r} \rightarrow B'I = -r\cos\theta$ et $JI = r$ donc :
$$\begin{cases} x = r\theta - r\sin\theta \\ y = r - r\cos\theta \end{cases}$$

2. Calculons les composantes et le module de la vitesse de M.

   Elles sont données par les dérivées de x et de y par rapport au temps. Ainsi $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ et $\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$; on aura donc :
   $$\begin{cases} \dot{x} = r\dot{\theta} - r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

   Le module est donné par : $|V| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(r\dot{\theta})^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]}$

   $= \sqrt{2}.rw\sqrt{1-\cos\theta}$ car $\dot{\theta}$ n'est autre que la vitesse angulaire w donnée dans l'exercice.

   $|V| = \sqrt{2}.rw\sqrt{1-\cos\theta} = 2rwsin\frac{\theta}{2}$

   Lorsque M passe en J on a $\theta = 0$ et donc $V = 0$.

3. Calculons les modules des différentes accélérations.

   Les composantes de l'accélération du mouvement sont données par les dérivées par rapport au temps de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ainsi on aura :
   $$\begin{cases} \ddot{x} = rw^2 sin\theta \\ \ddot{y} = rw^2 cos\theta \end{cases}$$ car w est une constante.

   $|a| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = rw^2$

   L'accélération tangentielle est donnée par : $a_t = \frac{dV}{dt} = rw^2 cos\frac{\theta}{2}$

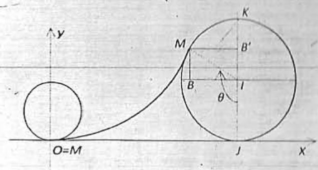
   $a_t = rw^2 cos\frac{\theta}{2}$

   L'accélération normale quand à elle est donnée par : $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{(rw^2)^2\left[1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right]} = rw^2 sin\frac{\theta}{2}$

   Déduisons le rayon de courbure R de la trajectoire.

   - On a : $a_n = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(2rwsin\frac{\theta}{2})^2}{rw^2 sin\frac{\theta}{2}} = 4rsin\frac{\theta}{2}$

   $R = 4r\sin\frac{\theta}{2}$



Exercice 2

1.1. Distinction des lentilles convergentes et divergentes

Les lentilles minces convergentes sont biconvexes ou plan-convexes et sont plus épaisses au centre qu'au bord.

Les lentilles minces divergentes sont biconcaves ou plan- concaves et plus minces au centre qu'au bord.

1.2. Condition de Gauss

- les rayons incidents doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique

- seule la zone de la lentille voisine du centre optique doit être utilisée

Cela revient à dire que la lentille doit être stigmatique (l'image d'un point est un point) et aplanétique (l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est elle-même perpendiculaire à l'axe).

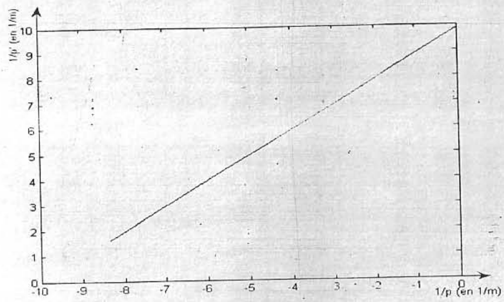
1.3.

1.3.1. Formules de conjugaison de Descartes et de grandissement :

$(1/p')-(1/p)=(1/f')$ f' étant la distance focale image

$\gamma=p'/p$

1.3.2. L e tracé donne un segment de droite :



L'intersection du segment et de l'axe vertical conduit donc à : $\frac{1}{p}=0$ d'où $\frac{1}{f'}=\frac{1}{p'}$

Le tracé montre que $\frac{1}{p'}=9,9$ d'où $f'=1/9,9=0,10\ m=10\ cm$

La vergence est $C=1/f'=9,9$

1.3.3. AA' est minimale pour $p=-20cm$ et $p'=20cm$

$\gamma=-1$, d'où $A'B'$ est renversé et de même grandeur que AB

1.4.

1.4.1. La vergence du système $(L+L_1)$ est $C'=C+C_1$

L'image du système est réelle si $C>0 \Rightarrow C_1>-C$

$C_1>-9,9\delta$

1.4.2. $\frac{1}{O_1A'}-\frac{1}{O_1A}=C+C_1 \Rightarrow C_1=\frac{1}{O_1A'}-\frac{1}{O_1A}-C$

$C_1=-4,9\delta$

Exercice 3

1.

a) Donnons l'expression de Z et φ en fonction de R, L, C et f.

On a: $Z=\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$ or $w=2\pi f \Longrightarrow Z=\sqrt{R^2+(2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC})^2}$

$tan\ \varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}=\frac{2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC}}{R} \Longrightarrow \varphi=artan\frac{2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC}}{R}$

b) Déterminons la valeur de f_0 telle que i soit en phase avec u.

i et u en phase $\Longrightarrow \varphi=0$, nous sommes à la résonance et donc $2\pi fL-\frac{1}{2\pi fC}=0$

$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

c) Calcul de l'intensité efficace I_0.

A la résonance Z= R $\Longrightarrow I_0=\frac{U}{R}$

A.N $= I_0\frac{30}{60} = 0{,}5A$ donc $I_0 = 0{,}5A$

2. Montrons qu'il existe deux valeurs f_1 et f_2 de la fréquence pour lesquelles φ a la même valeur absolue.

Soit φ le déphasage correspondant à la fréquence f_1 on aura :

$$\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = R\tan\varphi \Leftrightarrow \omega^2 - \frac{R}{L}\tan(\varphi)\,\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2}\tan^2(\varphi) + \frac{4}{LC} = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L}{R^2C}\right) \text{ or } \frac{1}{C} = L\omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)$$

ω_1 est solution de cette équation et existe car : $\Delta = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right) > 0$

$$\omega = \frac{\frac{R}{L}\tan(\varphi) \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}}{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{R}{2L}\left(\tan(\varphi) \pm \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$$

La pulsation ω étant toujours positive, on en déduit que:

$$\omega = \frac{R}{2L}\left(\tan(\varphi) + \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right) \Leftrightarrow f = \frac{R}{4\pi L}\left(\tan(\varphi) + \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$$

Soit $f_1 = f = \frac{R}{4\pi L}\left(\tan(\varphi) + \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$

Soit φ' le déphasage correspondant à f_2 ; $|\varphi'| = |\varphi| \Leftrightarrow \tan\varphi' = -\tan\varphi$

$$-\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R\tan\varphi \Leftrightarrow \omega^2 + \frac{R}{L}\tan(\varphi)\,\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Delta = \frac{R^2}{L^2}\tan^2(\varphi) + \frac{4}{LC} = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L}{R^2C}\right) \text{ or } \frac{1}{C} = L\omega_0^2 \Leftrightarrow \Delta = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)$$

ω_2 est solution de cette équation et existe car : $\Delta = \frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right) > 0$

$$\omega = \frac{-\frac{R}{L}\tan(\varphi) \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2}\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}}{2} \Leftrightarrow \omega = -\frac{R}{2L}\left(\tan(\varphi) \pm \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$$

La pulsation ω étant toujours positive, on en déduit que:

$$\omega = -\frac{R}{2L}\left(\tan(\varphi) - \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right) \Leftrightarrow f = -\frac{R}{4\pi L}\left(\tan(\varphi) - \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$$

Soit $f_2 = f = -\frac{R}{4\pi L}\left(\tan(\varphi) - \sqrt{\left(\tan^2(\varphi) + \frac{4L^2\omega_0^2}{R^2}\right)}\right)$

N.B: Ce sont des fréquences pour lesquelles la puissance électrique transmise au dipôle (R, L, C) est égale à la moitié de la puissance maximale fournie sont les limites de la bande passante à - 3 décibels. Les intensités efficaces du courant correspondant à ces fréquences sont telles que : $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 étant l'intensité efficace à la résonance.

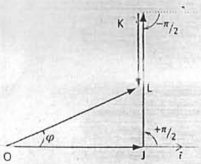
Etablissons la relation $f_1 \cdot f_2 = f_0^2$.

D'une part : $\tan\varphi_1 = \frac{L\omega_1 - \frac{1}{C\omega}}{R}$ et $\tan\varphi_2 = \frac{L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}}{R}$ et d'autre part : $\tan\varphi_1 = -\tan\varphi_2$

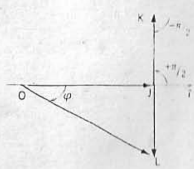
$\Rightarrow L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = -\left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right) \Rightarrow w_2(Lcw_1^2 - 1) = -w_1(Lcw_2^2 - 1)$

$\Rightarrow Lcw_1w_2(w_1 + w_2) = (w_1 + w_2) \Leftrightarrow \omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Leftrightarrow f_1 \cdot f_2 = f_0^2$

Construction de Fresnel



$\varphi > 0$



$\varphi < 0$