CORRECTION BAC CDE 2013

Exercice 1.

$$20\ véhicules \begin{cases} 10\,T1 \\ 3T2 \\ 7T3 \end{cases}$$

1. Calcul de la probabilité pour que les trois véhicules soient de même type.
   On peut avoir 3T1, 3T2, ou 3T3 accidentés.
   $p = \frac{C_{10}^3 + C_3^3 + C_7^3}{C_{20}^3} = \frac{156}{1140}$
   $\boldsymbol{p = \frac{13}{95}}$
2. a) Loi de probabilité de X
   $X \in \{0, 1, 2, 3\}$
   X= variable aléatoire égale au nombre de véhicules accidentés.

x_i	0	1	2	3
$p[X = x_i]$	$\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = \frac{6}{57}$	$\frac{C_{10}^1 C_{10}^2}{C_{20}^3} = \frac{15}{38}$	$\frac{C_{10}^2 C_{10}^1}{C_{20}^3} = \frac{15}{38}$	$\frac{C_{10}^3}{C_{20}^3} = \frac{6}{57}$

   b) Calcul de l'espérance E(X).
   $E(X) = \sum x_i p_i = \left(0 \times \frac{6}{57}\right) + \left(1 \times \frac{15}{38}\right) + \left(2 \times \frac{15}{38}\right) + \left(3 \times \frac{6}{57}\right)$
   $E(X) = \frac{57}{38}$

Exercice 2

X	0	1	2
$p[X = x_i]$	$1/2$	[illegible]	1/4

Y	1	2	3
$p[Y = y_i]$	$1/3$	[illegible]	1/6

1. Calcul de E(X)
   $E(X) = \sum x_i p_i = \left(0 \times \frac{1}{2}\right) + \left(1 \times \frac{1}{4}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$
   $E(X) = \frac{3}{4}$
   $E(Y) = \sum y_i p_i = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + \left(3 \times \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{6}$
   $E(Y) = \frac{11}{6}$
2. Loi de probabilité de Z= X+Y
   Les valeurs possibles de Z sont la somme des coordonnées des couples de la forme (X, Y).
   Or (X+Y) $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- X+Y=1 $\Rightarrow \begin{cases} X = 0\ et\ Y = 1 \\ p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$ $\quad p[Z = 1] = \frac{1}{6}$
- X+Y=2 $\Rightarrow \begin{cases} X = 0\ et\ Y = 2 \\ ou \\ X = 1\ \text{et}\ Y = 1 \\ p = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\quad p[Z = 2] = \frac{1}{3}$

- X+Y=3 ⇒ $\begin{cases} X = 1 \text{ et } Y = 2 \\ ou \\ X = 2 \text{ et } Y = 1 \\ ou \\ X = 0 \text{ et } Y = 3 \\ p = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{28}{96} = \frac{7}{24} \end{cases}$ $p[Z = 3] = \frac{7}{24}$
- X+Y=4 ⇒ $\begin{cases} X = 2 \text{ et } Y = 2 \\ ou \\ X = 1 \text{ et } Y = 3 \\ p = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} \end{cases}$ $p[Z = 4] = \frac{1}{6}$
- X+Y=5 ⇒ $\begin{cases} X = 2 \text{ et } Y = 3 \\ p = \frac{1}{24} \end{cases}$ $p[Z = 5] = \frac{1}{24}$

Z	1	2	3	4	5
$p[Z = z_i]$	$1/6$	$1/3$	$7/24$	$1/6$	$1/24$

On vérifie aisément que $\sum p_i = 1$

3. Calcul de l'espérance mathématique de Z

$E(Z) = \sum z_i p_i = \sum(x_i + y_i)\, p_i = E(X) + E(Y) = \left(1 \times \frac{1}{6}\right) + \left(2 \times \frac{1}{3}\right) + \left(3 \times \frac{7}{24}\right) + \left(4 \times \frac{1}{6}\right) \times$
$\left(5 \times \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{4} + \frac{11}{6} = \frac{31}{12}$

Exercice 3

Calculons le coefficient de corrélation des variables U et V soit r'.

Par définition, la moyenne d'une variable est donnée par : $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum n_i x_i$ sa variance par :

$V(X) = \frac{1}{N}(\sum n_i x_i^2) - \bar{X}^2$ et l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Pour $U = aX + b$ et $V = cY + d$ on a :

$\bar{U} = \frac{1}{N}\sum n_i(ax_i + b) = a(\frac{1}{N}\sum n_i x_i) + \frac{1}{N}\sum b = a\bar{X} + b$ car $\sum b = bN$

$\bar{U} = a\bar{X} + b$, de même $\bar{V} = c\bar{Y} + d$

Et $V(U) = \frac{1}{N}(\sum n_i(ax_i + b)^2) - (a\bar{X} + b)^2$

$= a^2 \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 + \frac{1}{N}\sum n_i b^2 + \frac{1}{N}\sum 2ab n_i x_i - a^2\bar{X}^2 - b^2 - 2ab\bar{X}$

$= a^2\left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{X}^2\right) + \left(b^2\frac{1}{N}\sum n_i - b^2\right) + (2ab\frac{1}{N}\sum n_i x_i - 2ab\bar{X})$

$= a^2\left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{X}^2\right) = a^2 V(X)$ car les autres termes s'annulent entre eux.

Donc $V(U) = a^2 V(X)$ et $V(V) = c^2 V(Y)$

Le coefficient de corrélation $r'(U,V) = \frac{COV(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$ or $COV(U,V) = \frac{1}{N}\sum V_i U_i - \bar{V}\bar{U}$ car pour la série statistique à deux variables $n_i = 1$.

$COV(U,V) = \frac{1}{N}\sum(ax_i + b)(cy_i + d) = ac(\frac{1}{N}\sum y_i x_i)) + ad(\frac{1}{N}\sum x_i) + bc(\frac{1}{N}\sum y_i) + bd(\frac{1}{N}\sum)$

$= ac[COV(X,Y) + \bar{X}\bar{Y}] + ad\bar{X} + bc\bar{Y} + bd$;

$\bar{V}\bar{U} = (a\bar{X} + b)(c\bar{Y} + d) = ac\bar{X}\bar{Y} + ad\bar{X} + bc\bar{Y} + bd$;

$\sigma(U) = a\sigma(X)$ et $\sigma(V) = c\sigma(Y)$;

$r'(U,V) = \frac{COV(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)} = \frac{ac[COV(X,Y) + \bar{X}\bar{Y}] + ad\bar{X} + bc\bar{Y} + bd - (ac\bar{X}\bar{Y} + ad\bar{X} + bc\bar{Y} + bd)}{ac\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = r$

Donc $r' = r$.

Si on exprime deux variables en fonction de deux autres de manière linéaire alors ces nouvelles variables ont le même coefficient de corrélation.

Exercice 4

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \cos(n\frac{\pi}{4})u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calcul des valeurs sur un cycle.

$u_1 = \cos 0 . u_0 = 1$; $u_2 = \cos\frac{\pi}{4}u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $u_3 = \cos\frac{\pi}{2}.u_2 = 0$: et $\forall n \geq 4, u_n = 0$

Exercice 5

1.

a) Déterminons le module et un argument de Z.

$|Z| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{2}$

$arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$; $arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \arg(Z) = arg(\sqrt{3}+i) - arg(1-i) = \frac{5\pi}{12}$.

Partie réelle et imaginaire de Z

$Z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1+i(1+\sqrt{3})}{2}$

$\Rightarrow Re(Z) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\mathrm{Im}(Z) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

b) Déduisons la valeur exacte de $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{5\pi}{12})$

$\begin{cases} |Z| = \sqrt{2} \\ \arg(Z) = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow Z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

$\Rightarrow \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + i(\frac{\sqrt{3}+1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2.

a) Déterminons $n \in \mathbb{N}$ / Z^n soit un réel.

$Z = \left[\sqrt{2}; {}^{5\pi}/_{12}\right] \Rightarrow Z^n = \left[\sqrt{2}; {}^{5\pi}/_{12}\right]^n = \left[(\sqrt{2})^n; \frac{5\pi}{12}n\right]$

$Z^n \in \mathbb{R}$ ssi $\arg(Z^n) \equiv 0[\pi]$

$\Rightarrow \frac{5\pi}{12}n \equiv 0[\pi]$

$\Rightarrow \frac{5\pi}{12}n = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n = \frac{12k}{5}$ or $0 < n \leq 24 \Rightarrow 0 < \frac{12k}{5} \leq 24$

$\Rightarrow 0 < k \leq 10$

si on prend $k = 5$, $\Rightarrow n = 12$

$\arg(Z^n) = 5\pi$, $\Rightarrow Z^n \in \mathbb{R}$ donc prendre $n = 12$.

b) Déterminons $m \in \mathbb{N}$ / Z^m soit un imaginaire pur.

Z^m imaginaire pur $\Rightarrow \arg(Z^m) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

$\Rightarrow \frac{5\pi}{12}m = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow 5m = 6 + 12k$ $\Rightarrow m = \frac{6+12k}{5}$

or $0 < m \leq 24 \Rightarrow 0 < \frac{6+12k}{5} \leq 24$

$\Rightarrow 0 < \frac{1+2k}{5} \leq 4 \Rightarrow 0 < 1 + 2k \leq 20 \Rightarrow 0 < k \leq 9,5$

Pour $k = 2 \Rightarrow m = 6$

$\arg(Z^m) = \frac{5\pi}{12}m = \frac{5\pi}{12} \times 6 = \frac{5\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$

$\arg(Z^m) = \frac{\pi}{2}$ $\quad Z \in i\mathbb{R}^*$