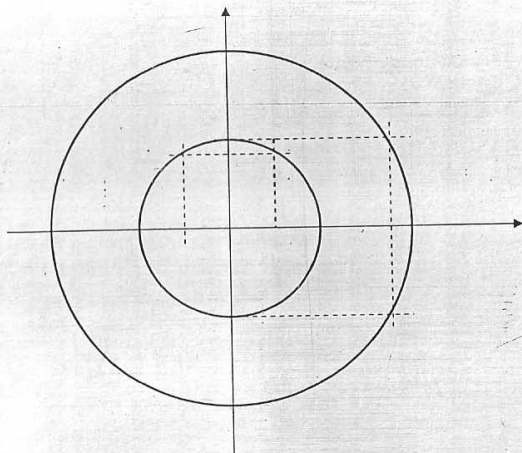


CORRECTION BAC CDE 2012

EXERCICE 1

1)



2)

a) Déterminons les affixes Z_A et Z_B

$$Z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} + i) = 2i$$

$$Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} Z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} + i$$

Donc :

$$Z_A = 2i \quad Z_B = \sqrt{3} + i$$

b) Déterminons l'affixe Z_D

$$Z_D = Z_B + Z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$$

$$\text{Donc } Z_D = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

c) Voir figure 1.

3) Déterminons un argument du complexe $\frac{Z_A - Z_B}{Z_D}$

$$\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_D}\right) = \arg(Z_A - Z_B) - \arg(Z_D)$$

$$\text{Or } Z_A - Z_B = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Donc } \arg(Z_A - Z_B) = \pi - \frac{\pi}{6} \text{ et } \arg(Z_D) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{D'où } \arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_D}\right) = \frac{\pi}{2}$$

• Justifions que la droite (OD') est une médiatrice du triangle $OA'B'$.

$OA'B'$ est équilatéral car $A, B \in C_{(0,2)}$, alors $A', B' \in C_{(0,1)}$ et $\arg(Z_A - Z_B) = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Par ailleurs } \arg(Z_A - Z_B) = \arg\left(\frac{Z_D}{Z_A}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Donc (OD') est médiatrice de $OA'B'$.

EXERCICE II

Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

- 1) Donnons l'ensemble de définition D_g de g
 $g(x)$ existe ssi $e^x - 1 \neq 0$ et donc $x \neq 0$
 $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

- 2) Donnons les solutions de l'équation $g(x) = 3$

$$g(x) = 3 \Rightarrow \frac{2e^x}{e^x - 1} = 3 \text{ soit } 2e^x = 3e^x - 3$$

$$S = \{\ln 3\}$$

- 3) Calculons la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} \text{ , faisons un changement de variable en posant } X = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2X}{X - 1} = 2$$

- 4) Calculons la primitive G de la fonction g dans l'intervalle $]1; +\infty[$

$$G(x) = \int \frac{2e^x}{e^x - 1} = 2 \ln |e^x - 1| \text{ or dans }]1; +\infty[(e^x - 1) > 0 \text{ donc}$$

$$G(x) = 2 \ln (e^x - 1)$$

EXERCICE III

Montrons que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

- i. Cherchons le sens de variation.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \text{ donc la suite } (U_n) \text{ est croissante.}$$

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0 \text{ donc la suite } (V_n) \text{ est décroissante.}$$

- ii. La suite (U_n) est croissante est minorée par 1, de plus le terme $\frac{1}{n}$ est positif donc $U_n < V_n$

- iii. Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$$

De i, ii, iii nous pouvons conclure que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

L'encadrement de l est donné par $U_{n_0} \leq l \leq V_{n_0}$. l'amplitude est donc $|V_{n_0} - U_{n_0}|$

Déterminons alors n_0

$$|V_{n_0} - U_{n_0}| \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{n_0} \leq 10^{-3} \Rightarrow n_0 \geq 1000$$

EXERCICE IV

- 1) Donnons la probabilité P_1 pour que le joueur perde.

Le joueur perd s'il reçoit moins de dix francs ou nous avons trois boules sur lesquelles la somme inscrite est inférieure à dix francs donc

$$P_1 = \frac{c_3}{c_{10}} = 0,3$$

Donnons la probabilité P_2 pour que le joueur reçoive plus de dix francs.

nous avons six boules sur lesquelles la somme inscrite est supérieure à dix francs donc

$$P_2 = \frac{c_6}{c_{10}} = 0,6$$

- 2) Donnons les valeurs prises par la variable aléatoire X

$X = \text{nombre inscrit} - 10$

$$X = \{-5; -4; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

a. Présentons la loi de probabilité de X

X	-5	-4	0	1	2	3	4	Total
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1	1
$x_i p_i$	-0,5	-0,8	0	0,3	0,2	0,3	0,4	-0,1
$x_i^2 p_i$	2,5	3,2	0	0,3	0,4	0,9	1,6	8,9

b. Calculons $E(x)$

$$E(x) = \sum x_i p_i = -0,1. \text{ L'espérance représente le gain moyen du joueur.}$$

Calcul de la variance

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2$$

$$A.N. V(X) = 8,9 - 0,01 = 8,89$$

Calcul de l'écart type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$A.N. \sigma(X) = 2,98$$

c) Proposons une solution

Il suffit par exemple de conserver les nombres inscrits sur les premières boules et remplacer le numéro 14 par 15 : Bref sur les 07 numéros, conserver 06 d'entre eux et faire varier le numéro restant pour obtenir $E(X) = 0$.

EXERCICE V

Soit l'équation différentielle : $y' - y = 2xe^x$ (1)

1) Prouvons que la fonction f définie par $f(x) = x^2 e^x$ est une solution particulière de l'équation (1)

$$f'(x) = 2xe^x + e^x x^2 = 2xe^x + f(x)$$

$$f' - f = 2xe^x, f \text{ vérifie bien l'équation (1)}$$

2) Donnons la solution générale de l'équation (1)

Solution homogène $y' - y = 0$ donc $y(x) = Ae^x$

Solution générale $y(x) = Ae^x + x^2 e^x$

3) Déterminons l'unique solution g de (1) telle que : $g(0) = 1$.

$$g(0) = 1 \Rightarrow A = 1 \text{ donc } g(x) = (x^2 + 1)e^x$$

Montrons que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et tracer sa courbe dans un repère orthonormal. (On précisera les pentes des tangentes aux deux points de la courbe d'abscisse 1 et 0).

g est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = (x+1)^2 e^x; g'(x) > 0 \text{ donc } g \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

Calculons la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^x = +\infty$$

Tableau de variation

Évident

La pente d'une tangente en un point n'est autre que le nombre dérivée en ce dernier.

$$\text{En } x = 1 \text{ la pente est } g'(1) = 4e = 10,88$$

$$\text{En } x = 0 \text{ la pente est } g'(0) = 1$$

Traçons la courbe de g

Évident.