www.tousleseconcours.info

CORRECTION BAC CDE 2011

EXERCICE 1

1) On rappelle que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^3 = 8$

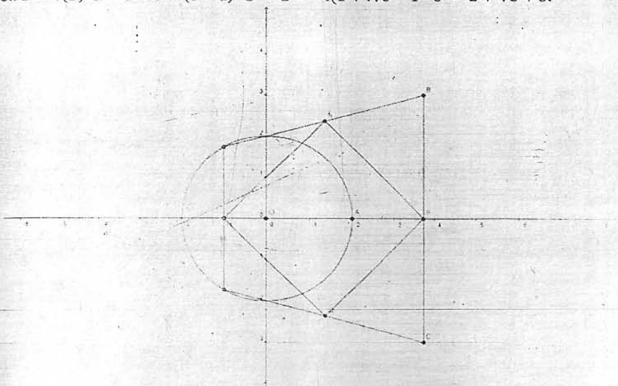
$z^3 = 8 \Rightarrow z^3 - 8 = 0$

$\Rightarrow z^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (z-2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \Rightarrow (z-2)(z + 1 + i\sqrt{3})(z + 1 - i\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow z = 2; z = -1 - i\sqrt{3}; z = -1 + i\sqrt{3}$

2) On pose $r = rot\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$ et $r' = rot\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$

on $B' = r(B)$ $b' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$ $b' - 2 = -i(1 + i\sqrt{3} - 1$ $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$



c) montrons que b' et c' sont conjugués

$C' = r(C)$ $c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a) \Rightarrow c' - 2 = i(-1 - i\sqrt{3} - 3i) \Rightarrow c' = 2 + \sqrt{3} - 3i$

On a bien que c' et b' sont conjugués

3) Soient les points M_m ; N_n ; P_p et Q_q

a) Montrons que $n = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$

$$n = \frac{b' + b}{2} = \frac{2 + 3i - 1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) + \sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{2}$$

déduisons que O, N et C sont alignés

$$\frac{n}{c} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{2} \times \frac{1}{-1-i\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}$$ donc O, N et C sont alignés

b) Montrons que $n + 1 = i(q+1)$

$$n + 1 = \frac{(1+\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{2} + 1 = \frac{1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3i + 2}{2} = \frac{\sqrt{3}(1+i)(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$q = \frac{c' + c}{2} = \frac{2 + \sqrt{3} - 3i - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(1-i\sqrt{3})}{2}$$

$$i(q+1) = i\left(\frac{(\sqrt{3}+1)(1-i\sqrt{3})}{2} + 1\right) = i\left(\frac{\sqrt{3} - 3i + 1 - i\sqrt{3} + 2)}{2}\right) = i\,\frac{(\sqrt{3} - i\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(1+i)(1+\sqrt{3})}{2}$$

D'où le résultat

www.touslesconcours.info

$n+1 = i(q+1)$ $\quad \frac{n+1}{q+1} = i$ or $m = \frac{b+c}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} = -1$

donc $\frac{n+1}{q+1} = i$ $\quad \frac{n-m}{q-m} = i$ $\quad$ MNQ est un triangle rectangle isocèle

c) Montrons que **MNPQ** est un carré

$n - m = n + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(1+i)(1+\sqrt{3})}{2}$

$p - q = 2 + \sqrt{3} - \frac{2+\sqrt{3}-3i-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,(1+i)(1+\sqrt{3})}{2}$

on a $n - m = p - q \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et en plus $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = \frac{\pi}{2}$ donc MNPQ est un carré

EXERCICE 2

1.a) Donnons l'équation de $(\wp)$

Soit $\vec{u}$ le vecteur directeur de (D) on a $\vec{u} = (-4, -1, -2)$. (D) est perpendiculaire au plan $(\wp)$

soit $M(x, y, z)$ un point de $(\wp)$ alors $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow -4(x+1) - (y-2) - 2(z-3) = 0 \Longrightarrow -4x - y - 2z + 4 = 0$

donc $(\wp): -4x - y - 2z + 4 = 0$

1.b) Montrons que $B(-3,3,4) \in (D)$

on a $\begin{cases} -3 = 9 - 4t \\ 3 = 6 - t \end{cases}$ ce qui donne $t = 3$ et on a bien pour la dernière équation $2 - 2t = 4$

pour $t = 3$ on a bien l'équation paramétrique vérifie au point B et par suite $B \in (D)$

1.d) Exprimons d_B en fonction de AB

$d_B = AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

2) Soit $M \in (D)$, exprimons AM en fonction de t

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 9-4t+1 \\ 6-t-2 \\ 2-2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-4t \\ 4-t \\ -1-2t \end{pmatrix}$ donc $AM = \sqrt{(10-4t)^2 + (4-t)^2 + (1+2t)^2}$

pour $t = 3$ on a $M \equiv B$ et $AM = AB = d = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

PROBLEME :

1) a) $g(0)=0$

b) Expliquons pourquoi $g'(0)=2$

la tangente en $x=0$ est donnée par l'équation $y=2x=g'(0)(x-0)+g(0)=g'(0)x$ et par identification on obtient bien $g'(0)=2$.

On a $\forall x \in [0, +\infty[, g(x) \geq 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0], g(x) \leq 0$

2) on pose $g(x)=ax+b+e^x$

a) déterminons b

$g(0)=0 \Longrightarrow b+1=0 \Longrightarrow b=-1$

b) calculons $g'(x)$

$g'(x)=a+e^x$

c) déduire la valeur de $g(x)$

$g'(0)=2 \Longrightarrow a+1=2 \Longrightarrow a=1$

Donc $\forall x,\ g(x) = x - 1 - e^x$

Soit $f(x) = x - 4 - xe^{-x}$

1) montrons que $\forall x \neq 0, f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x} - e^{-x}\right)$

www.tousleconcours.info

$f(x) = x - 4 - xe^{-x} = x\left(1 - \frac{4}{x} - e^{-x}\right)$

2) a) calcul des limites

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{4}{x} - e^{-x}\right) = +\infty$

b) montrons que y=x-4 est AO

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} x - 4 - xe^{-x} - (x-4) = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = 0$ donc $y = x - 4$ est A.O

c)Position relative

$f(x) - y = -xe^{-x}$; si $x > 0, f(x) - y < 0$ *et* (C)est en dessous de (D)

si $x < 0, f(x) - y > 0$ *et* (C)est au dessus de (D)

3) a) Calculons f'(x) et montrons que f'(x)=g(x)e⁻ˣ

$f'(x) = 1 - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}e^{x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x - 1 + e^{x}) = g(x)e^{-x}$

b) signe de f'(x)

$f'(x) = g(x)e^{-x}$; or $\forall x, e^{-x} > 0$ *donc* f'et g ont le même signe.

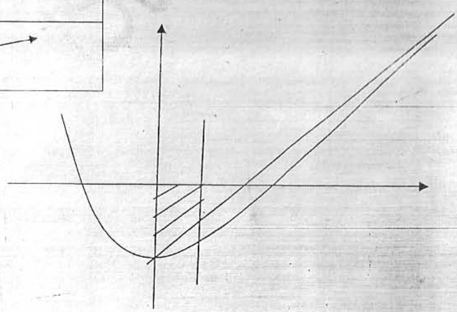
donc $\forall x \geq 0, f'(x) > 0$ *et* $\forall x \leq 0, f'(x) < 0$

c)Variation de f(x) et tableau des variations

$\forall x \geq 0, f'(x) > 0$ *et par suite **f** est croissante dans* $[0, +\infty[$

$\forall x \leq 0, f'(x) < 0$ *et par suite **f** est décroissante dans* $]-\infty, 0]$

x	-∞	0	+∞
f'(x)	-	0	+
f	+∞ ↘	4	↗



Calcul de l'aire

1) Soit $h(x) = -xe^{-x}$

a) Soit $H(x) = (x+1)e^{-x}$, montrons que H est une primitive de h

$H'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = -xe^{-x} = h(x)$ d'ou le résultat

b) Calcul de l'intégrale de f

$\int f(x)dx = \int x - 4 - xe^{-x} = \frac{1}{2}x^2 - 4x + H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + (x+1)e^{-x}$

2) Calcul de l'aire

$A = \int_0^2 (-f(x))dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x + (x+1)e^{-x}\right]_0^2 = 15 - 3e^{-2}$

$A = (15 - 3e^{-2})u.a$