CORRECTION BAC CDE 2009

EXERCICE I :

Soit le tableau de notes suivantes :

Y / X	[0,8[	[8,12[	[12,20]	total
[0,8[	20	18	2	40
[8,12[	30	27	3	60
[12,20]	50	45	5	100
total	100	90	10	200

1) Calculons les probabilités des évènements suivants :on notera not_{maths} et not_{bio} les notes

Soit A « avoir $not_{bio} < 8$ et $not_{maths} \geq 12$ » ; B « avoir $not_{bio} > 8$ » et enfin

C « $not_{maths} \geq 12$ sachant que $not_{bio} < 8$ »

Card (A) =2 $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{200}$; Card (B) = 100 $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$; Card (C) = 50 et Card ($not_{bio} < 8$) =100

Donc $P(C) = \frac{1}{2}$

2) Indépendance des variables

On a $P(\ not_{bio} < 8\ \cap\ not_{maths} \geq 12) = \frac{1}{100}$

$P(\ not_{bio} < 8\ ) = \frac{1}{50}$ et $P(not_{maths} \geq 12) = \frac{1}{20}$

On conclut que $P(\ not_{bio} < 8\ ) \times P(not_{maths} \geq 12) \neq P(\ not_{bio} < 8\ \cap\ not_{maths} \geq 12)$

Donc les variables sont dépendantes.

EXERCICE II :

Soit la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

PARTIE A :

1) Soit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$

a) Déterminons la limite de g en 1

$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} 2x - (x-1)\ln(x-1) = \lim_{X\to 0} 2(X+1) - X\ln(X) = 2$ où X = x-1

b) Calculons g'(x)

$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = 1 - \ln(x-1)$

c) Résoudre dans $]1,+\infty[$ l'inéquation $1-\ln(x-1) > 0$

$1-\ln(x-1) > 0 \Rightarrow \ln(x-1) < 1$

$\Rightarrow x-1 < e \Rightarrow x < e+1$

$\Rightarrow S =]-\infty, e+1[$

d) Variation de g

$1-\ln(x-1) > 0 \Rightarrow x < e+1$ et $1-\ln(x-1) < 0 \Rightarrow x > e+1$

Donc g est croissante sur $]-\infty, e+1[$ et g est décroissante sur $]e+1, +\infty[$; le tableau de variation de g est donnée par :

x	1		e+1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	
g		↗	$e+2$	↘	$-\infty$

e) Montrons que $g(x) = 0$ a une solution α

On a $I = [e+1, e^3+1] \subseteq [e+1, +\infty[$ et g est monotone dans $[e+1, +\infty[$, de plus $g(e+1) = e+2 > 0$ et $g(e^3+1) = 1 - e^3 < 0$. Donc $g(e+1).\ g(e^3+1) < 0$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique α dans $[e+1, e^3+1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

D'après de tableau de variation de g, on $\forall x \in]1, \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[$, $g(x) < 0$

2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$ sur $]1, +\infty[$

a) Déterminons la limite de φ en 1

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1) + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{x} + \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x+1)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

b) Calculons $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}.\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2}\ln(x^2-1) = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$\varphi'(x)$ a le signe de $2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1) = g(x^2)$ car $x^2(x^2-1) > 0$

c) Montrons que φ est croissante sur $]1, \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur $]\sqrt{\alpha}, +\infty[$

On a $\forall t \in]1, \alpha[$, $g(t) > 0$, pour $t = x^2$, $x \in]1, \sqrt{\alpha}[$ et $g(t) = g(x^2) = \varphi'(x).x^2(x^2-1) > 0$

$\Rightarrow$ $\forall x \in]1, \sqrt{\alpha}[$ $\varphi'(x) > 0$ et par suite φ est croissante.

De même, $\forall t \in]\alpha, +\infty[$, $g(t) < 0$, pour $t = x^2$, $x \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$ et $g(t) = g(x^2) = \varphi'(x).x^2(x^2-1) < 0$

$\Rightarrow$ $\forall x \in]\sqrt{\alpha}, +\infty[$, $\varphi'(x) < 0$ et par suite φ est décroissante.

PARTIE B :

Etude de f

1) Vérifions que $\forall x \in]0,+\infty[$, on a $f(x)=\varphi(e^x)$

$$\varphi(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2 - 1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} = f(x)$$

2) Déduire les limites de f et le sens de variation de f

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} \varphi(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$$

$\forall t \in]1, \sqrt{\alpha}[$ $\varphi'(t) > 0$ pour $t = e^x$, $x \in]0, \ln(\sqrt{\alpha})[$, $f(x) = \varphi(e^x)$ et $f'(x) = e^x\varphi'(e^x) > 0$ donc f est croissante.

$\forall t \in]\sqrt{a}, +\infty[$, $\varphi'(t) < 0$ pour $t = e^x$, $x \in]\ln(\sqrt{\alpha}), +\infty[$, $f(x) = \varphi(e^x)$ et $f'(x) = e^x\varphi'(e^x) < 0$ donc f est décroissante.

D'après les variations de , φ admet un maximum en $\sqrt{\alpha}$ donc $f(t) = \varphi(e^t)$ admet un maximum en x_0 tel que $e^{x_0} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow x_0 = \ln(\sqrt{\alpha})$

3) Montrons que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

$\ln(\sqrt{\alpha})$ est le maximum de f et on a $\forall x \in]0,+\infty[$,$f(x) \leq f(\ln(\sqrt{\alpha}))$

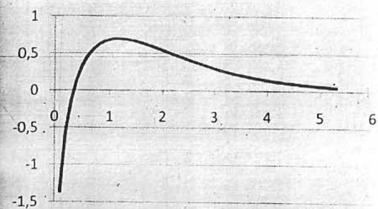
$$f(\ln(\sqrt{\alpha})) = \frac{\ln(e^{2\ln(\sqrt{\alpha})}-1)}{e^{\ln(\sqrt{\alpha})}} = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$$

D'autres part, $g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0$

$$\Rightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f\left(\ln(\sqrt{\alpha})\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha-1} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4) Reproduisons le tableau.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)	-1,36	0,33	0,68	0,66	0,54	0,3



PARTIE C : Recherche de primitive de f

1) Vérifions que f est solution de $y'+y = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^x}\ln(e^{2x}-1) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^x}\ln(e^{2x}-1)$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} - \frac{1}{e^x}\ln(e^{2x}-1) + \frac{1}{e^x}\ln(e^{2x}-1)$$

$$= \frac{2e^x}{(e^x-1)(e^x-1)} = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$$

D'où le résultat

2) On pose $h(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$

a) Une primitive H de h est donnée par :

$$H(x) = \int h(x)\,dx = \int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x)}{e^x-1} - \int \frac{d(e^x)}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x-1)}{e^x-1} - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1}$$

$$= \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) + cte_0 \quad \text{où } cte_0 \text{ est une constante}$$

b) En déduire une primitive F de f

On a $f'(x) + f(x) = h(x) \Rightarrow \int \left(f'(x) + f(x)\right) dx = \int h(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int f'(x)\,dx + \int f(x)\,dx = H(x) \Rightarrow f(x) + F(x) = H(x) \Rightarrow F(x) = H(x) - f(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) - \frac{1}{e^x}\ln(e^{2x}-1) + cte_1 \quad , \text{ où } cte_1 \text{ est une constante}$$

EXERCICE III :

Soit $A_{a=5-i\sqrt{3}}$ et B tel que OAB équilatéral direct

1) Démontrons que $B_{b=4+2i\sqrt{3}}$

On doit avoir $|a| = |b| = |b-a|$, et $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\pi}{3}$

On a $|a| = \sqrt{25+3} = \sqrt{28}$; $|b-a| = \sqrt{1+27} = \sqrt{28}$; $|b| = \sqrt{16+12} = \sqrt{28}$

De même $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{4+2i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\frac{(5-i\sqrt{3})(4+2i\sqrt{3})}{28}\right) = \arg\left(\frac{14+14i\sqrt{3}}{28}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Q est milieu de [OB] et Q d'affixe q donnée par :

$q = \frac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}$

K est tel que ABQK soit un parallélogramme et K est d'affixe z_k donnée par la relation :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Rightarrow b - a = z_k - q$

$\Rightarrow z_k = -b + a + q$

$\Rightarrow z_k = -4 - 2i\sqrt{3} + 5 - i\sqrt{3} + 2 + i\sqrt{3} = 3 - 2i\sqrt{3}$

2) Démontrons que $\frac{z_k - a}{z_k}$ est un imaginaire pur

$$\frac{z_k - a}{z_k} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \frac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(3 + 2i\sqrt{3})(-2 - i\sqrt{3})}{21}$$
$$= \frac{-6 - 4i\sqrt{3} - 3i\sqrt{3} + 6}{21} = \frac{-i\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit que OQAK est un rectangle

3) Soit C le point le d'affixe $c = \frac{2a}{3} = \frac{10 - 2i\sqrt{3}}{3}$. Calculons $\frac{z_k - b}{z_k - c}$:

$$\frac{z_k - b}{z_k - c} = \frac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{10 - 2i\sqrt{3}}{3}}$$
$$= \frac{-3 - 12i\sqrt{3}}{-1 - 4i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(-3 - 12i\sqrt{3})(-1 + 4i\sqrt{3})}{49} = \frac{147}{49} \in \mathbb{R}$$

On en déduit que B, C et K sont alignés