CORRECTION BAC CDE 2008

EXERCICE I :

- 3 boules vertes de N°0
- 2 boules rouges de N°5
- 1 boule noire de N°a

On tire 3 boules de l'urne, soit Ω l'univers associé à cette expérience. On a **card $\Omega=C_6^3=20$**

1) Calcul des probabilités
   - Card a$=C_3^3=1 \Rightarrow P(a)=\frac{1}{20}$;
   - Card b$=C_3^1C_2^1C_1^1=6 \Rightarrow P(b)=\frac{3}{10}$
   - Card c$=C_3^2C_3^1+C_4^1C_2^2=13 \Rightarrow P(c)=\frac{13}{20}$

2) Les valeurs de X sont : X={0; 5, 10, a, 5+a, 10+a} et les probabilités sont données par

Card $(X=0)=C_3^3C_3^0=1 \Rightarrow P(X=0)=\frac{1}{20}$;

Card $(X=5)=C_3^2C_2^1C_1^0=6 \Rightarrow P(X=5)=\frac{6}{20}$;

Card $(X=10)=C_2^2C_3^1C_1^0=3 \Rightarrow P(X=10)=\frac{3}{20}$;

Card $(X=a)=C_3^2C_1^1C_2^0=3 \Rightarrow P(X=a)=\frac{3}{20}$;

Card $(X=5+a)=C_3^1C_2^1C_1^1=6 \Rightarrow P(X=5+a)=\frac{6}{20}$;

Card$(X=10+a)=C_3^0C_2^2C_1^1=1 \Rightarrow P(X=10+a)=\frac{1}{20}$;

La loi de probabilité est donné par :

X	*0*	*5*	*10*	*a*	*5+a*	*10+a*
P(X=k)	*1/20*	*6/20*	*3/20*	*3/20*	*6/20*	*1/20*

L'espérance mathématique est donnée par :

$$E(X)=\frac{6}{20}5+\frac{3}{20}10+\frac{3}{20}a+\frac{6}{20}(5+a)+\frac{1}{20}(10+a)=\frac{a+10}{2}$$

$$E(X)=10 \Rightarrow \frac{a+10}{2}=10 \Rightarrow \mathbf{a=10}$$

EXERCICE II :

1) a) Résoudre l'équation $z^2-4z+8=0$

On a par division euclidienne $z^2-4z+8=(2-2i)(2+2i)$. Donc les solutions de $z^2-4z+8=(2-2i)(2+2i)=0$

sont $z_1=2+2i$ et $z_2=2-2i$

b) Ecrivons les solutions sous forme exponentielle

$z_1=2+2i=2(1+i)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

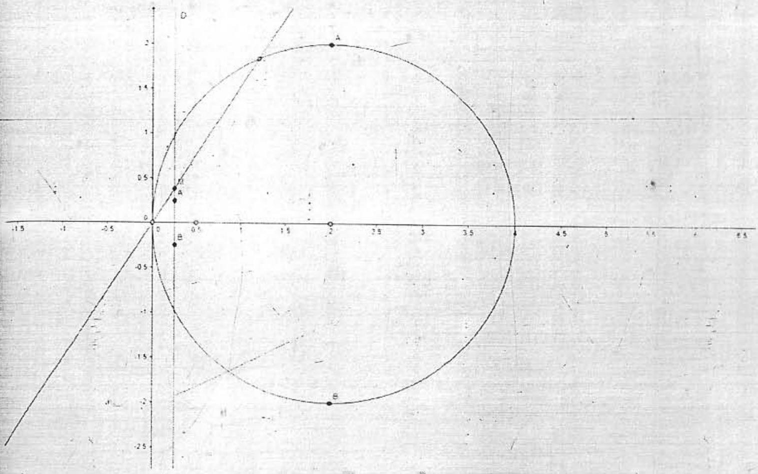
et $z_2=2-2i=2(1-i)=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) soit l'application f telle que $f(Z')=\frac{1}{z}$

a) calculons les images des points A et B par f

$z_{A'} = \frac{1}{\overline{z_A}} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1}{4}(1+i)$; $z_{B'} = \frac{1}{\overline{z_B}} = \frac{1}{2+2i} = \frac{1}{4}(1-i)$

b) plaçons les points sur une figure



c) Montrons que $\forall M$ distinct de O, les points O, M, et M' sont alignés et que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 1$

On a $\frac{z'}{z} = \frac{\frac{1}{\bar z}}{z} = \frac{1}{\bar z z} = \frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}$ donc O, M, et M' sont alignés

De plus on a $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \|\overrightarrow{OM}\|\|\overrightarrow{OM'}\| \cos(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'})$

$= |Z'||z|$

$= \left|\frac{1}{\bar z}\right| |z| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$

3) a) Montrons que: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - Z'\right| = |Z'|$

$|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|z\left(1-\frac{2}{z}\right)\right| = 2 \Leftrightarrow |z|\left|1-\frac{2}{z}\right| = 2$

$\Leftrightarrow \left|1-\frac{2}{z}\right| = \frac{2}{|z|} = \frac{2}{|\bar z|}$

$\Leftrightarrow 2\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar z}\right| = \frac{2}{|\bar z|}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$

b) Soit C $(I_{(2,0)}, 2)$ le cercle de centre I

Soit $M \in C\backslash\{0\} \Rightarrow |z-2| = 2 \Rightarrow \left|Z' - \frac{1}{2}\right| = |Z'|$

$\Rightarrow CM' = OM'$ où $C\left(\frac{1}{2};0\right)$

$\Rightarrow M' \in (D)$ (D)est la médiatrice de [OC]

d) soit $M \in C\backslash\{0, A, B\}$

Construire M' image de M par f

On doit avoir O, M et M' alignés avec M'∈ (D)

PROBLEME

Partie A

Soit f définie par $f(x)=Log(1+e^{-x})$

1) a) Déterminons les limites de f

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} Log(1+e^{-x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} Log(1+e^{-x}) = 0$

b) Montrons que ∀x, $f(x)=-x+Log(1+e^{x})$

$f(x)=Log(1+e^{-x})=Log(1+\frac{1}{e^{x}})$

$=-Log(e^{x})+Log(1+e^{x})$

$=-x+Log(1+e^{x})$

c) Déduisons l'existence d'une asymptote en $-\infty$

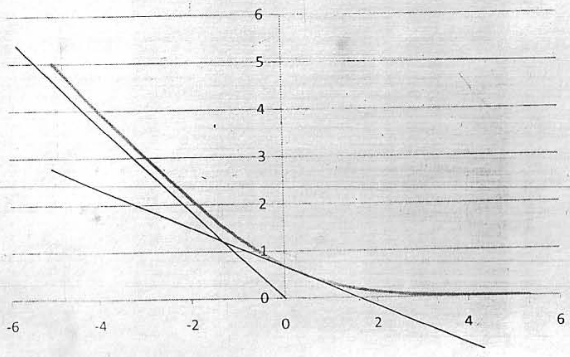
On a $\lim_{-\infty} f(x)+x = \lim\limits_{x\to-\infty} Log(1+e^{x})=0$

Donc la droite (d):y=-x est asymptote oblique à f en $-\infty$

2) Variation de f

$f'(x)=-1+\frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{-1-e^{x}+e^{x}}{1+e^{x}} = \frac{-1}{1+e^{x}}<0$ donc f est décroissante ∀ x ∈ ℝ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		-	
f	$+\infty$	↘	ln2



Partie B

Soit g et h définies par $g(t)=Log(1+t)-t$ et $h(t)=Log(1+t)-t+\frac{t^{2}}{2}$

1) Variation de h et g

$g'(t)=\frac{1}{1+t}-1=\frac{-t}{1+t}<0$ ∀ x ∈ $\mathbb{R}_{+}$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_{+}$

et $h'(t)=\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1-1+t^2}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$ donc h est croissante sur $\mathbb{R}_+$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	0 ↘	

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	
h	0 ↗	

2) Montrons que pour tout réel positif t : $t - \frac{t^2}{2} \leq \text{Log}(1+t) \leq t$

On a $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \text{Log}(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$

De même on a $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) \leq 0 \Rightarrow \text{Log}(1+t) - t \leq 0 \Rightarrow \text{Log}(1+t) \leq t$

Donc $t - \frac{t^2}{2} \leq \text{Log}(1+t) \leq t$

3) Déduisons que pour tout réel x, $e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

On a $\forall t \geq 0$, $e^{-t} \geq 0$ donc $e^{-t} - \frac{(e^{-t})^2}{2} \leq \text{Log}(1+e^{-t}) = f(t) \leq e^{-t}$ et par suite on obtient

$$\forall x \geq 0, \; e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

Partie C

1) Soit a>1 et n>0, on pose

$$A_n = \frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n}$$

a) Expression de A_n

$$A_n = \frac{1}{a^1} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^n} - 1}{\frac{1}{a} - 1}\frac{1}{a} = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1-a^n}{a^n}\right) = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)$$

On a $\forall a > 1$, $1 - \frac{1}{a^n} < 1 \Rightarrow A_n < \frac{1}{a-1}$ et par suite A_n est majorée par $\frac{1}{a-1}$

b) Montrons que A_n converge

On a $A_{n+1} - A_n = \frac{1}{a^{n+1}} > 0$ *donc* (A_n) est une suite croissante

(A_n) est croissante et majorée donc convergente

2) On définit les suites $(S_n)_{n\in N^*}$ et $(T_n)_{n\in N^*}$

Déterminons les limites de ces suites.

$$S_n = \frac{\frac{1}{e^n} - 1}{\frac{1}{e} - 1}\frac{1}{e} = \frac{1}{e-1}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) \to \frac{1}{e-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e-1}$$

$$T_n = \frac{\frac{1}{e^{2n}} - 1}{\frac{1}{e^2} - 1}\frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2-1}\left(1 - \frac{1}{e^{2n}}\right) \to \frac{1}{e^2-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{e^2-1}$$

Partie D :

Soit $(U_n)_{n\in N^*}$, la suite définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et $U_{n+1} = \left[1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right]U_n$

1) Démontrons que $U_n > 0$. Soit P(n) la proposition :"$\forall n \geq 1, U_n > 0$"

Pour n=1 on a $U_1 = 1 + \frac{1}{e} > 0$ d'où P(1) est vrai

Supposons P(n) vrai, alors pour le rang n+1 on a : $U_{n+1} = \left[1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right]U_n > U_n > 0$ par hypothèse

Donc P(n+1) est vrai.

Conclusion : $\forall n \geq 1, U_n > 0$

2) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par $V_n = \text{Log}(U_n)$

a) Montrons que $V_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$. Soit $P(n)$ "$\forall n \geq 1, V_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$"

Pour n=1 on a $V_1 = \text{Log}(1+\frac{1}{e}) = \text{Log}(1+e^{-1}) = f(1)$ donc $P(1)$ est vrai

Supposons que $P(n)$ est vrai, alors pour le rang n+1 on a : $V_{n+1} = \text{Log}(U_{n+1}) = \text{Log}(\left[1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right]U_n$

$= \text{Log}(U_n) + \text{Log}(1 + e - (n+1)) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + f(n+1)$ et $P(n+1)$ est vrai

Conclusion : $\forall n \geq 1, V_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

b) Montrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

On a $V_{n+1} - V_n = f(n+1) > 0$ d'après le tableau de variation de f

Donc $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

c) Montrons que : $\forall n \neq 0, S_n - \frac{T_n}{2} \leq V_n \leq S_n$

On a, $e^{-x} + \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$ et $V_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$:

Pour x=1 on a $e^{-1} + \frac{e^{-2}}{2} \leq f(x) \leq e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^2} \leq f(1) \leq \frac{1}{e}$

Pour x=2 on a $e^{-2} + \frac{e^{-4}}{2} \leq f(x) \leq e^{-2} \Rightarrow \frac{1}{e^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^4} \leq f(1) \leq \frac{1}{e^2}$

Pour x=n on a $e^{-n} + \frac{e^{-n}}{2} \leq f(x) \leq e^{-n} \Rightarrow \frac{1}{e^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{e^{2n}} \leq f(1) \leq \frac{1}{e^n}$

En sommant membre à membre on obtient :

$$\left(\frac{1}{e^1} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \cdots + \frac{1}{e^{2n}}\right) \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq \frac{1}{e^1} + \frac{1}{e^2} + \cdots + \frac{1}{e^n}$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{1}{2}T_n \leq V_n \leq S_n$$

d) Montrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et qu'elle converge

On a $V_n \leq S_n \leq \frac{1}{e-1}$ donc $V_n \leq \frac{1}{e-1}$ et par suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée donc convergente car croissante.

e) Prouvons que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq V_n \leq \frac{1}{e-1}$

On a $S_n \leq \frac{1}{e-1}$ et $T_n \leq \frac{1}{e^2-1} \Rightarrow -\frac{T_n}{2} \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$

$$\Rightarrow S_n - \frac{T_n}{2} \geq \frac{2e+1}{2(e^2-1)}$$

Or $V_n \leq \frac{1}{e-1}$

Donc $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq V_n \leq \frac{1}{e-1}$

3) Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$ car (V_n) converge

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \log(U_n) = l$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e^l$ car e^x est continue

Donc U_n converge