EXERCICE 1

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Soit Ω l'univers associé à cette expérience alors $\text{card}\Omega = C_{11}^3 = 183$

a) Calculons les probabilités suivantes

$$\text{card } E_1 = C_6^1 C_3^1 C_2^1 \text{ et } P(E_1) = \frac{\text{card } E_1}{\text{card } \Omega} = \frac{C_6^1 C_3^1 C_2^1}{C_{11}^3} = \frac{12}{55}$$

$$\text{card } E_2 = C_6^3 + C_3^3 \text{ et } P(E_2) = \frac{\text{card } E_2}{\text{card } \Omega} = \frac{C_6^3 + C_3^3}{C_{11}^3} = \frac{7}{55}$$

b) Soit X la variable aléatoire associé au nombre de boules bleues tirées.

On a $X \in \{0,1,2,3\}$ et $\text{card}(X = 0) = C_6^3 C_3^0 = 10$; $\text{card}(X = 1) = C_5^2 C_6^1 = 6$;

$\text{card}(X = 2) = C_5^1 C_6^2 = 75$; $\text{card}(X = 3) = C_6^3 C_5^0 = 20$ et les probabilités sont:

$P(X = 0) = \frac{2}{33}$; $P(X = 1) = \frac{4}{11}$; $P(X = 2) = \frac{5}{11}$; $P(X = 3) = \frac{4}{33}$ et la loi est définie par :

X	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{2}{33}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{33}$

L'espérance mathématique est donnée par :

$$E(X) = \frac{4}{11} + \frac{10}{11} + \frac{12}{33} = \frac{18}{11}$$

2) $k \geq 2$

Soit P_1 la probabilité de tirer 1 boule bleue alors $P_1 = {}^6/_{11}$

Soit P_2 la probabilité de tirer une boule rouge alors $P_2 = {}^3/_{11}$

Soient les évènements « A : au cour des k tirages on a obtenu k boules bleues » et « B : Au cours des k tirage on a obtenu k boules rouges »

$P(A) = C_k^k (P_1)^k = ({}^6/_{11})^k$ et $P(B) = C_k^k (P_2)^k = ({}^3/_{11})^k$

déterminons **k** tel que $P(A) \geq 1000\, P(B)$

$P(A) \geq 1000\, P(B) \Rightarrow ({}^6/_{11})^k \geq 1000({}^3/_{11})^k \Rightarrow 2^k({}^3/_{11})^k \geq 1000({}^3/_{11})^k$

$$\Rightarrow 2^k \geq 1000 \Rightarrow k \geq \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} = 9{,}66$$

EXERCICE 2 :

1) ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD]

$G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, -1); (D, 1)\}$. Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{ID} = 0$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$G_2 = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (D, 2)\}$. Exprimer $\overrightarrow{IG_2}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$

$$\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2D} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{G_2I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_2I} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{G_2I} + 2\overrightarrow{ID} = 0$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{G_2I} + 2\overrightarrow{ID} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$$

En déduire la position de G_2 par rapport aux points I et D: G_2 est milieu de [ID]

Exprimer $\overrightarrow{JG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$

On a $\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG_1} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{JG_1} = \overrightarrow{CI}$$

2) soit $m \in \mathbb{R}$, $G_m = \text{bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, m-2); (D, m)\}$; $m \neq 0$

a) soit $E_m = \{m;\ G_m \text{ existe}\} \Rightarrow E_m = \{m;\ m \neq 0\}$

b) déterminons en foncton de m, a et b tel que $m\overrightarrow{IG_m} = a\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{ID}$

on a $\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mB} + (m-2)\overrightarrow{G_mC} + m\overrightarrow{G_mD} = 0 \Rightarrow 2m\overrightarrow{G_mI} + (m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID} = 0$

$$\Rightarrow m\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{m}{2}\overrightarrow{ID}$$

$$\text{donc } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{m-2}}{\mathbf{2}} \text{ et } \mathbf{b} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}$$

les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ ne sont pas colinéaires donc définissent un plan P. soit $P = \langle \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID} \rangle$

alors $G_m \in P$ et les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont bien deux vecteurs de P.

c) Vérifions que : $\forall m,\ m\overrightarrow{JG_m} =$ constante

$$m\overrightarrow{IG_m} = \frac{m-2}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{m}{2}\overrightarrow{ID} \Rightarrow 2m\overrightarrow{IG_m} = (m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID}$$

$$= (m-2)\overrightarrow{IJ} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{IJ} + m\overrightarrow{JD} = 2m\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{JC}$$

$$\Rightarrow 2m\overrightarrow{IJ} + 2m\overrightarrow{JG_m} = 2m\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{IJ} - 2\overrightarrow{JC} \Rightarrow m\overrightarrow{JG_m} = -\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CI}$$

donc $\forall \mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, $\overrightarrow{JG_m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\overrightarrow{CI}$ et $F = \{G_m \,/\, m \in E\} = C\left(J, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}} IC\right)$

EXERCICE 3 :

Soit $A_{z_A=1}$; $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $P_1 = P \setminus \{A\}$. Soit $f(z) = \frac{1}{z-1}$ et l'application T telle que:

$$T : P_1 \longrightarrow P;$$
$$m_z \longmapsto m'_z \text{ tel que } Z = f(z)$$

1) a) On pose $Z_0 = f(4 + i\sqrt{3})$

$$Z_0 = \frac{1}{4 + i\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{12} \quad \text{et } |Z_0| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{144}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

on peut donc écrire $Z_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/6} - i\frac{\sqrt{3}/12}{\sqrt{3}/6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c) soit z_1 et z_2 solutions de l'équation $f(z) = z$

$$f(z) = z \Rightarrow \frac{1}{z-1} = z \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$$

$\Rightarrow z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On prendra : $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2) On considère les points m(z) et m(Z) où Z=f(z)

a) Exprimer $|Z|$ et $\arg(Z)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$

$$|Z| = \left|\frac{1}{z-1}\right| = \frac{1}{|z-1|} \quad \text{et } \arg(Z) = \arg\left(\frac{1}{z-1}\right) = -\arg(z-1)$$

b) On suppose $m \in C(A, R)$

$|Z| = \frac{1}{|z-1|}$ or $m \in C \Rightarrow |z-1| = R$ donc $|Z| = \frac{1}{R}$ et par suite $M \in C'(O, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}})$

c) Soit $C_1 = C \cap P_+$ et $m(z) \in C_1$

alors $\arg(z-1) \in [0, \pi]$ et en posant $C'_1 = f(C_1)$ alors $M \in C'_1 \Rightarrow \arg Z = -\arg(z-1) \in [-\pi, 0]$

on déduit que $C'_1 = C' \cap P_-$

3) On pose z=x+iy et Z=X+iY

a) Exprimons X et Y en fonction de x et y

$$Z=f(z) \Rightarrow Z = \frac{1}{z-1} \Rightarrow X + iY = \frac{1}{x+iy-1} = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \quad \text{et } Y = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$$

b) Déterminons $E = \{z \,/\, f(z) \in \mathbb{R}\}$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Rightarrow (y = 0 \text{ et } x \neq \mathbf{1})$$

$$\Rightarrow E = (Ox) \setminus \{A\}$$

c) Déterminons $F = \{z / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

$T(m) \in (Ov) \Rightarrow f(z) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} = 0$

$\Rightarrow (x = 1 \text{ et } y \neq 0) \quad \Rightarrow F = D_1 \setminus \{A\} \quad \text{avec} \quad (D_1): x = 1$

4) On considère $(D): x = \frac{1}{2}$. Soit $m \in (D)$ et $m\left(\frac{1}{2}, y\right)$

a) On a $z = \frac{1}{2} + iy$. Exprimons Z en fonction de z

$$Z = f(z) \Rightarrow Z = \frac{1}{\frac{1}{2} + iy - 1} = \frac{2}{-1+iy} = \frac{2(-1-iy)}{y^2+1} = \frac{-2}{y^2+1}(1+iy)$$

b) Soit M_Z et B_{-1}. Calculons BM

$$BM = |Z+1| = \left|\frac{-2}{y^2+1}(1+iy)+1\right| = \left|\frac{-2}{y^2+1}\left(\frac{-2-iy+y^2+1}{-2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{y^2+1}(y^2-2iy-1)\right| = 1$$

$BM = 1 \Rightarrow M \in C(B, 1)$

5) On considère $x \in [-1,1[$ et (γ) la courbe d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$

y est un demi − cercle de centre 1 et de rayon 1.

soit $\varphi: [-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

soit x_1 et x_2 $/ \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, alors $\frac{1+x_1}{1-x_1} = \frac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow 1 - x_2 + x_1 - x_1x_2 = 1 + x_2 - x_1 - x_1x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ et par suite φ est injective

soit $y / \varphi(x) = y$ alors $y^2 = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow y^2 - y^2x = 1 + x \Rightarrow y^2 - 1 = x(y^2+1)$

$\Rightarrow x = \dfrac{y^2-1}{y^2+1} \in [-1,1[$ donc φ est surjective et par suite φ est bijective

donc φ^{-1} exixte et est définie par : $\varphi^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow [-1,1[$

$$y \longmapsto \frac{y^2-1}{y^2+1}$$

$(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{4y}{(y^2+1)^2} > 0$ *donc* φ^{-1} est croissante et son tableau de variation est :

x	0	1	+∞
$(\varphi^{-1})'(x)$		+	
(φ^{-1})	-1	↗