

EXERCICE I : (5pts)

Dans un jury de baccalauréat, on a relevé les notes obtenues par 200 candidats en mathématiques (X) et en biologie (Y). Les résultats sont présentés dans un tableau. On a regroupé les notes en trois sous-ensembles : $[0,8[$; $[8,12[$; $[12,20]$. On choisit un élève au hasard.

- 1) Calculer la probabilité que sa note soit strictement inférieure à 8 en biologie et supérieure ou égale à 12 en mathématiques
- 2) Calculer la probabilité que sa note soit strictement supérieure à 8 en biologie
- 3) Sachant qu'un élève a obtenu une note strictement inférieure à 8 en biologie, quelle est la probabilité qu'elle soit supérieure ou égale à 12 en mathématique ?
- 4) Les notes obtenues en mathématiques et en biologie sont-elles indépendantes ?

Y	$[0,8[$	$[8,12[$	$[12,20]$
X			
$[0,8[$	20	18	2
$[8,12[$	30	27	3
$[12,20]$	50	45	5

EXERCICE II : (10pts)

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{x}$ puis la recherche de primitives de cette fonction.

PARTIE A :

Étude de fonctions auxiliaires

- 1) On définit la fonction g sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.
 - 1.a. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.
 - 1.b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$
 - 1.c. résoudre, dans $]1, +\infty[$ l'inéquation $1 - \ln(x-1) > 0$
 - 1.d. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]1, +\infty[$
 - 1.e. Montrer que l'équation $g(x)=0$ a une solution unique, notée α , dans l'intervalle $[e+1, e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$

2) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$

- 2.a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ puis prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
- 2.b. Calculer $\varphi'(x)$ puis montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$
- 2.c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1, \sqrt{\alpha}[$ et est décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

PARTIE B :

Étude de la fonction f

- 1) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, on a $f(x) = \varphi(e^x)$
- 2) En déduire :
 - 2.a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0
 - 2.b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

2.c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis montrer que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$

3) Montrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4) Reproduire le tableau suivant et compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-1} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

5) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités .5cm abscisses et 10cm ordonnées. On prendra 10 pour valeur approchée de α

PARTIE C :

Recherche de primitives de f .

1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$

2) On pose $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$

2.a Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0, +\infty[$

2.b En déduire les primitives de F de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$

EXERCICE III : (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2cm, considère le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$, le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct c'est-à-dire $\arg(\frac{OB}{OA}) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ et Q milieu de $[OB]$.

- Démontrer que B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q de Q . Déterminer l'affixe z_k du point tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.
- Démontrons que $\frac{z_k - a}{z_k}$ est un imaginaire pur. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA ? Préciser la nature du quadrilatère $OQAC$. Placer les points A, B, Q et K dans le plan.
- Soit c le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$. Calculer $\frac{z_k - b}{z_k - c}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ? Placer sur la figure.