# EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2008

## EXERCICE I : (5pts)

Une urne contient trois boules vertes portant le numéro 0, deux rouges portant le numéro 5 et une boule noire portant le numéro a (a est un entier naturel non nul, différent de 5 et de 10). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un joueur tire simultanément trois boules de l'urne.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il tire :
   a) Trois boules de la même couleur ;
   b) Trois boules de couleurs différentes ;
   c) Deux boules et deux seulement de même couleur.
2) Le joueur reçoit, en franc, la somme des numéros marqués sur les boules tirées. Les gains possibles du joueur sont donc : 0 ;5 ;a ;10 ;5+a ;10+a.
   a) Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de a
   c) Calculer a pour que l'espérance de gain du joueur soit 10 francs

## EXERCICE II : (5pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (O, u, v)

1) a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $Z^2-4Z+8=0$
   b) Ecrire les solutions $Z_1$ et $Z_2$ de cette équation sous forme exponentielle ( $Z_1$ sera la solution dont la partie imaginaire est positive).
   Placer les points A et B d'affixes respectives $Z_1$ et $Z_2$
2) On considère l'application f qui, à tout M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe Z' tel que :
   $Z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z
   a) Calculer les affixes A' et B' images de A etB par f
   b) Placer ces points sur la figure
   c) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M, et M' sont alignés et que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 1$
3) a) Montrons que: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - Z'\right| = |Z'|$
   b) Soit (C) cercle de centre I, d'affixe (2,0) et de rayon 2. Soit M un point de (C) distinct de O. Montrer que M' est situé sur une droite (D) que l'on caractérisera. Placer (C) et (D) sur la figure.
   c) Soit M un point quelconque du cercle C, distinct de O, A et B. Construire M' image de M par f

## PROBLEME (10pts)

### PARTIE A.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\text{Log}(1+e^{-x})$

1) a) déterminer les limites de f à $-\infty$ et $+\infty$
   b) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=-x+\text{Log}(1+e^{x})$
   c) En déduire que la courbe représentative C de f admet à $-\infty$ une asymptote oblique notée (d), on donnera l'équation.

2)- Etudier les variations de f. Dresser son tableau de variation

3) Représenter la courbe C dans un repère orthonormé (O, i, j) ; tracer la droite (d) ainsi que la droit tangente à C au point d'abscisse 0.

PARTIE B

Soit g et h les fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\text{Log}(1+t)-t$ et $h(t)=\text{Log}(1+t)-t+\frac{t^2}{2}$

1) Etudier les variations et dresser les tableaux de variations des fonctions g et h
2) Montrer que pour tout réel positif t : $t-\frac{t^2}{2} \le \text{Log}(1+t) \le t$
3) En déduire que pour tout réel x, $e^{-x}+e^{-2x} \le f(x) \le e^{-x}$ (1)

PARTIE C

1) Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1 et n un entier naturel non nul. On pose

$$A_n = \frac{1}{a^1}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}$$

a) Exprimer $A_n$ en fonction de n et montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{a-1}$

b) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

2) On définie les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$S_n = \frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2}+\cdots+\frac{1}{e^n} \text{ et } T_n = \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^4}+\cdots+\frac{1}{e^{2n}}$$

Déterminer la limite des suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

PARTIE D

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$U_1=1+\frac{1}{e}$ et $U_{n+1}=\left[1+\frac{1}{e^{n+1}}\right]U_n$ ,pour tout entier naturel non nul.

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul $U_n>0$
2) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par $V_n=\text{Log}(U_n)$ pour tout entier naturel n non nul

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul : $V_n=f(1)+f(2)+..+f(n)$ (2)

b) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est croissante.

c) A l'aide des relations (1) et (2), Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$S_n - T_n/2 \le V_n \le S_n$

d) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et qu'elle converge

e) Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \le V_n \le \frac{1}{e-1}$

3) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.