www.touslesconcours.info

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2007

EXERCICE I : (3 pts)

Les questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher.

1- On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : les boules sont toutes de couleurs différentes.0.75 pts

E_2 : les boules sont toutes de même couleur.0.75 pts

b) On appelle X la variable aléatoire qui à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées. Etablir la loi de probabilité de X. (1.5 pts). Calculer l'espérance mathématique de X. (0.5 pts)

2- Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : On tire au hasard une boule de l'urne et l'on note sa couleur puis on la remplace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant, on effectue ainsi k tirage successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que les boules bleues soit au moins milles fois plus grande que la probabilité de ne tirer que les boules rouges ?

EXERCICE II : (5 pts)

On considère un tétraèdre ABCD. On note I milieu de [AB] et J milieu de [CD].

1- a- Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés (A, 1), (B, 1), (C,-1), (D, 1)

Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$

b- Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés (A, 1), (B, 1), (D, 2)

Exprimer $\overrightarrow{IG_2}$ en fonction de $\overrightarrow{ID}$. En déduire la position de G_2 par rapport aux points I et D.

c- Exprimer $\overrightarrow{JG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CI}$. en déduire $\overrightarrow{G_1G_2}$ en fonction de $\overrightarrow{G_2J}$

préciser la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J

d- Compléter la figure en y plaçant les points I, J, G_1 et G_2

2- Soit m un réel, on note G_m le barycentre du système de points pondérés {(A, 1), (B, 1), (C, m-1), (D, m)} quand il existe.

a) Préciser l'ensemble E des valeurs de m pour lesquelles le barycentre de G_m existe.

Dans qui suivent on suppose que m appartient à E.

b) Déterminer en fonctions de m, les réels a et b tels que $m\overrightarrow{IG_m} = a\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{ID}$

On donnera le détail de calcul. En déduire que G_m appartient à un plan fixe P. On donnera trois points définissant ce plan.

www.touslesconcours.info

c) Vérifier que $\overrightarrow{mJG_m}$ est égal à un vecteur constant, que l'on précisera

d) En déduire l'ensemble F des points G_m du plan P lorsque m décrit E

EXERCICE III : (7pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on appelle A le point d'affixe 1. C_1 l'ensemble $\mathbb{C}-\{1\}$; P le plan privé du pont A, P_+ le demi-plan des points de P_1 ayant une ordonnée positive o nulle ; P. l'ensemble des points de P_1 ayant une ordonnée négative ou nulle.

Soit f l'application de C_1 dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=\frac{1}{z-1}$ et soit T l'application de P_1 dans P qui au point m d'aff associe le point M d'affixe Z=f(z).

1. a) On pose $Z_0=f(4+i\sqrt{3})$. Donner l'expression algébrique et la forme exponentielle de Z_0

   b) Déterminer les complexes z_1 et z_2 vérifiant l'équation f(z)=z, donner les formes algébriqu exponentielles de z_1 et z_2.

2. On considère les points m(z) et M(Z) où Z=f(z)

   a) Exprimer $|Z|$ et $\arg(Z)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$

   b) On suppose que le point m appartient à un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

   c) Soit (C_1) le demi-cercle intersection de (C) et du demi-plan P et m(z) un point de (C_1). Que on dire de arg(z-1) ? En déduire une courbe (C_1') à laquelle appartient le point M où M=T(m).

3. On pose z=x+iy et Z=X+iY où x,y,X,Y sont des réels et Z=f(z).

   a) Exprimer X et Y en fonction de x et y

   b) Quel est l'ensemble E des valeurs de z pour lesquels f(z) est réel ?

   c) Quel est l'ensemble F des points m tel que T(m) appartient à la droite (O,V) ?

4. On considère la droite (D) d'équation $x=\frac{1}{2}$. Soit m le point de (D) ayant pour ordonné y.

   a) Quelle est l'affiche z de m ? Soit Z=f(z). Exprimer Z en fonction de y

   b) Soit M d'affixe Z et B d'affixe -1. Calculer BM ;en déduire que le point M appartient à un cerc dont on donnera une équation cartésienne.

5. On considère pour $x\in[-1,1[$, la courbe (γ) d'équation $y=\sqrt{1-x^2}$. Quelle est la nature géomét de (γ) ?

Soit φ l'application de $[-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. En déduire que φ admet une réciproque φ^{-1} on précisera le sens de variation. Tracer la courbe représentative de φ^{-1}.