Correction Maths IMIP 2014

INSTITUT DES MINES ET DES INDUSTRIES PETROLIERES

FILIERE : MINES ET CARRIERES

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 2014 / 2015

Exercice 1

Soient S,T et T' trois ensembles.

1) Montant que $S\cap(T\cup T') = (S\cap T)\cup(S\cap T')$

Nota : si A et B sont 2 ensembles, A= B si seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$

Montrons que $S\cap(T\cup T') \subseteq (S\cap T)\cup(T\cap T')$

Soit $x \in S\cap(T\cup T')$

$x \in S\cap(T\cup T') \Rightarrow x \in S$ et $x \in (T\cup T')$

$\Rightarrow x \in S$ et $(x \in T \; ou x \in T')$

$\Rightarrow (x \in S$ et $x \in T)$ ou $(x \in S$ et $x \in T')$

$\Rightarrow x \in S\cap T$ ou $x \in S\cap T'$

$\Rightarrow S\cap(T \cup T') \subseteq (S\cap T)\cup(S\cap T')$ (1)

* Réciproquement, montrons que $(S\cap T)\cup(S\cap T') \subseteq S\cap(T\cup T')$

$x \in (S\cap T)S \cup T') \Rightarrow x \in (S\cap T) ou\, x \in (S\cap T')$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in S \; et \; x \in T \\ \quad \text{ou} \\ x \in S \; et \; x \in T' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in S \\ \text{et} \\ (x \in S \; ou \; x \in T') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in S \\ \text{et} \\ x \in T\cup T' \rightarrow \; x \in S\cap(T\cup T') \end{cases}$$

$\Rightarrow (S\cap T)\cup(S\cap T') \subseteq S\cap(T\cup T')$ (2)

De (1) et (2) On a$(S \cap T')$ =(S∩T) ∪ (S∩T')

2) Montrons que $S\cap(T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup Tn) = (S\cap T_1) \cup (S\cap T_2) \cup \ldots \cup (S\cap T_n)$

Il revient à montrer que $S\cap (\bigcup_{i=1}^{n} Ti) = \bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti)$

Soit $x \in S\cap (\bigcup_{i=1}^{n} Ti)$

On a $x \in S$ et $x \in \bigcup Ti$

$\Rightarrow$ $x \in S$ et ($\exists ! j$ *tel que* $x \in Tj$), $j\in [1; n]$

$\Rightarrow$ $x \in S$ et $x \in Tj$)

$\Rightarrow$ $x \in S \cap Tj$

$\Rightarrow$ $x \in (\bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti))$ *car*

$\Rightarrow$ $S \cap(\bigcup_{i=1}^{n} Ti) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti)$ (1) $\left\{ \begin{array}{c} S \cap Tj \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti \\ \text{et donc} \\ x \in S \cap Tj \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti) \end{array} \right.$

Réciproquement, montrons que $\bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti) \subseteq S \cap (\bigcup_{i=1}^{n} Ti)$

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti)$

$x \in \bigcup_{i=1}^{n}(S \cap Ti) \Rightarrow (x \in S \cap T_1)$ ou $(x \in S \cap T_2)$ ou …ou $(x \in S \cap T_n)$

$\Rightarrow (x \in S \text{ et } x \in T_1)$ ou $(x \in S \text{ et } x \in T_2)$ ou …ou$(x \in S \text{ et }$ $x \in T_n)$

$\Rightarrow (x \in S) et\ (x \in T_1)$ ou $x \in T_2)$ ou …ou$x \in S$ *et* $x \in T_n)$

$\Rightarrow x \in S \text{ et } x \in \cup T_i)$

$\Rightarrow x \in S \cap(\bigcup_{i=1}^{n} Ti)$

$\Rightarrow \cup(S \cap T_i) \subseteq S\cap (\cup T_i)$ (2)

(1)et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{\bigcup_{i=1}^{n}(S \cap T_i) = S\cap (\bigcup_{i=1}^{n} Ti}$

Exercice 2

Soit f: N →N / $f(xy) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in N$

Montrons que $f(a^n) = nf(a)\ \forall a, n \in N$

D'après l'hypothèse, $f(xy) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in N$

En particulier pour $y = \underbrace{x \times x \times x \ldots \times x}_{(n-1)\text{ fois}} \in N$, la relation

(*) doit être vérifiée c'est-à-dire :

$$f(xy) = f(\underbrace{x. x \times x \times \ldots \times x}_{(n-1)\text{ fois}}) = f(x) + f(\underbrace{x. x \times x \times \ldots \times x}_{(n-1)\text{ fois}})$$

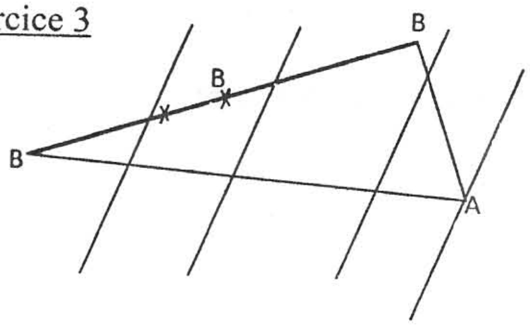
$$= f(x) + f(\underbrace{x. x \times x \times \ldots \times x}_{(n-1)\text{ fois}})$$

$$= n\, f(x)$$

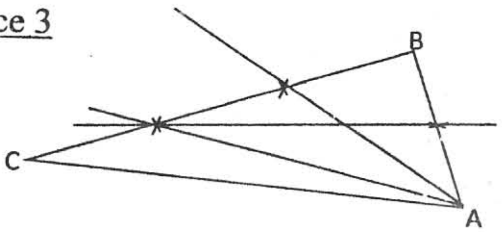
⇒ $f(x^n) = nf(x)$ pour x=a ∈N, On peut aussi écrire : $\boxed{F(a^n) = n\, f(a)}$ $\forall a, n \in N$

2) Enoncé Erroné

Exercice 3



Exercice 3



BC = 2 AB

D = milieu [BC]

E = milieu [BA]

(DF) //(AC)

2) montrons que F = milieu [AB] et que BF = BE

Dont le triangle ABC, (DF) // (AC), on a d'après la propriété Thalès

$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BC}{BC} = \frac{BF}{BA}$; soit AB = 2BF

D'où F $\in$[AB]

et $\rightarrow \begin{cases} F = \text{milieu } [AB] \\ BF = \frac{AB}{2} \end{cases}$

De même, $\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{2\,BE}{BC} = \frac{BF}{BA}$; soit $\frac{2\,BE}{2AB} = \frac{BF}{AB}$ $\Rightarrow$BF = BE

3 montrons que les triangles ABE et BDF sont congruents et e déduire que Mes $\widehat{EAF}$ = Mes $\widehat{EDF}$

D'après la figure et la question 2) $\begin{cases} BF = BE \\ \text{Mes } \widehat{ABD} = \text{Mes } \widehat{FBD} \end{cases}$

Or Mes $\widehat{FBD}$ = Mes($\widehat{ABE}$)

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Mes } \widehat{ABD} = \text{Mes}(\widehat{ABE}) = \text{Mes}(\widehat{FBD}) \\ BF = BE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Mes } \widehat{ABE} = \text{Mes}(\widehat{FBD}) \\ \text{et } BE = BF \end{cases}$

$\Rightarrow$ Les triangles ABE et BDF

Sont congruents

* déduire Mes $\widehat{EAF}$ = Mes $\widehat{EDF}$

ABE et FBD sont congruents $\Rightarrow$ ils ont des angles 2 à 2 égaux.

On a donc la disposition pratique :

$\frac{A}{D}\frac{B}{B}\frac{E}{F} \Rightarrow \begin{cases} \text{Mes } \widehat{BAE} = \text{Mes } \widehat{FDB} \\ \text{Mes } \widehat{AEB} = \text{Mes } \widehat{FDB} \end{cases}$ (1)

Or

$\begin{cases} \text{Mes } \widehat{BAE} = \text{Mes } \widehat{EAF} \\ \text{et} \\ \text{Mes } \widehat{BDF} = \text{Mes } \widehat{EDF} \end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Mes } \widehat{EAF} = \text{Mes } \widehat{EDF}}$

4) Montrons que BA = BD et déduire que Mes $\widehat{BAD}$ = Mes $\widehat{BDA}$

D'après Thalès dans (ABC), (DF) // (AC)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} \quad \Rightarrow \frac{BD}{2BD} = \frac{BE}{BA}$

$\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$ or BE = $\frac{BD}{2}$ $\Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BD/2}{BA} = \frac{1}{2}$

Soit $\quad \frac{BD}{2BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = 1$ soit BA = BD

*déduire Mes $\widehat{BAD}$ =Mes$\widehat{BDA}$

D'après Mes $\widehat{BAD}$ = Mes$\widehat{BDA}$

D'après le théorème des sinus dans le triangle ABD on a :

$\frac{BD}{sin\widehat{A}} = \frac{BA}{sin\widehat{D}}$ or BD = BA $\Rightarrow \frac{1}{sin\widehat{A}} = \frac{1}{sin\widehat{D}}$

$\Rightarrow$ sinBAD = Sin$\widehat{BDA}$

$\Rightarrow$ $\widehat{BAD} = \widehat{BDA}$ (car $\widehat{A}$ et $\widehat{D}$ sont des angles aigus)

Donc Mes $\widehat{BAD}$ = Mes $\widehat{BDA}$

5) Montrons que Mes$\widehat{EAD}$ = Mes $\widehat{FDA}$ et que Mes$\widehat{FDA}$ = Mes$\widehat{DAC}$

Considérons que EAD et FDA, on a

Mes $\widehat{BAD}$ = Mes $\widehat{BAE}$ + Mes $\widehat{EAD}$ (1)

Mes $\widehat{BDA}$ =Mes $\widehat{BDF}$ + Mes $\widehat{FDA}$ (2)

Or Mes $\widehat{BAD}$ =Mes $\widehat{BDA}$ $\Rightarrow$ Mes$\widehat{BAE}$ + Mes $\widehat{EAD}$ = Mes $\widehat{BDF}$ + Mes $\widehat{FDA}$

Mes $\widehat{FAE}$ + Mes $\widehat{EAD}$ = Mes$\widehat{EDF}$ + MesFDA

Car Mes$\widehat{BAE}$ = Mes ($\widehat{FAE}$) et Mes $\widehat{BDF}$ = Mes$\widehat{EDF}$)

Or d'après la question 3) Mes $\widehat{EAD}$ = Mes EDF

*Déduire Mes $\widehat{FDA}$ = Mes DAC

(DF) // (AC) et les 2 droite ont pour droite d'intersection commune (AD) par conséquent les angles FDA et $\widehat{DAC}$ sont alternes-internes

$\Rightarrow$ Mes $\widehat{FDA}$ = Mes $\widehat{DAC}$

6) Déduire que (AD) est bissectrice de $\widehat{CAE}$

D'après ce qui précède, $\begin{cases} \text{Mes } \widehat{DAC} = \text{Mes } \widehat{FDA} \\ \text{Mes } \widehat{DAC} = \text{Mes } \widehat{EAD} \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{Mes } \widehat{CAE} = \text{Mes } \widehat{DAC} + \text{Mes } \widehat{EAD} & (1) \\ \text{Mes } \widehat{DAC} = \text{Mes } \widehat{EAD} & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAE}$