REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail - Patrie
****
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
****
UNIVERSITÉ DE NGAOUNDÉRÉ
ÉCOLE DE GÉLOGIE ET D'EXPLOITATION MINIÈRE

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace - Work - Fatherland
****
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
****
THE UNIVERSITY OF NGAOUNDERE
SCHOOL OF GEOLOGY AND MINING ENGINEERING

Egem 2014 MATHS

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE DE
L'ÉCOLE DE GÉLOGIE ET D'EXPLOITATION MINIÈRE (EGEM)
DE L'UNIVERSITÉ DE NGAOUNDÉRÉ
****
ANNÉE ACADÉMIQUE 2014/2015
****

Épreuve de Mathématiques

Exercice I (5points)

1. On considère l'ellipse E définie paramétriquement par :
$$\begin{cases} x = a\sin t, & t \in [0, 2\pi], 0 < b < a \\ y = b\cos t \end{cases}$$
   (a) Soient e l'excentricité de E et f la fonction définie sur $(0, 1)$ par :
$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2\sin^2 t}\,dt.$$
   Montrer que la longueur L de E est donnée par $L = 4af(e)$;
   (b) Donner la valeur approchée de L pour $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.
2. Soient $x \in (0, 1)$ et F la fonction définie sur $[0, x)$ par
$$F(X) = \int_0^X \sqrt{\frac{1 - t^2}{x^2 - t^2}}\,dt.$$
   (a) En utilisant le changement de variable $t = x\sin\theta$, $\theta \in [0, \pi/2)$, montrer que $\lim\limits_{X \to x^-} F(X) = f(x)$.
   (b) Application : pour $\alpha \in [0, 1)$, déterminer
$$\lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{3 - u^2}{1 - u^2}}\,du$$
3. Exprimer à l'aide de f l'intégrale
$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\,dt.$$

Exercice II (5points)

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

(ξ) $$(1 + x^2)\, y' = 1 + 3xy$$

1. Démontrer que les solutions réelles de (ξ) sont des fonctions $f_\lambda(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = P(x) + \lambda\left(1 + x^2\right)^r$ pour tout réel x, où λ est un réel, r est un nombre rationnel à déterminer et P une fonction polynomiale à expliciter.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction g, solution de (ξ) qui admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Calculer la dérivée g' de g et étudier son signe.
4. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{g(x)}{x^3}$ lorsque x tend vers $-\infty$.
5. Représenter graphiquement la fonction g.

Exercice III (5points)

Soient α un nombre réel et H la fonction numérique définie par $H(x) = \alpha\cos x + \sin x + 2$ pour tout réel x.

1. Résoudre, en étudiant selon α, l'équation $H(x) = 0$.

   Dans la suite, on suppose que $|\alpha| < \sqrt{3}$.
2. Pour tout réel z, on pose
$$F(z) = \int_0^z \frac{dx}{H(x)}.$$
   (a) Vérifier que l'on définit bien ainsi une fonction $F(z)$ continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $z \in [0, \pi)$, exprimer $F(z)$.
3. Calculer l'intégrale $F(z)$.

Exercice IV (5points)

Pour cet exercice, il est conseillé de faire une figure claire et précise. Liberté est laissée au candidat quant aux méthodes utilisées (choix d'un repère, propriétés des barycentres, calculs vectoriels etc...). On se place dans l'espace affine habituel (ζ) de dimension 3.

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires de (ζ) définissant un tétraèdre $[ABCD]$. On appelle I, J, K les isobarycentres respectifs des triplets (A, B, C), (B, C, D) et (D, A, B). Soit (π) le plan contenant les points I, J, K.

1. Montrer que les droites (IK) et (CD) sont parallèles.
2. Montrer que le plan (π) et le plan $(\mathbb{P})$ défini par les points A, C et D sont parallèles.
3. Montrer que le plan (π) et le plan $(\mathbb{Q})$ défini par les points B, C et D sont sécants et préciser leur intersection.
4. En déduire la détermination et la construction de la section du tétraèdre $[ABCD]$ par le plan (π).
5. Soit G l'isobarycentre du triplet (I, J, K).
   Démontrer que la droite (BG) passe par L, l'isobarycentre du triplet (A, C, B).