

Martha 2011/2012

UNIVERSITE DE NGAOUNDERE
Ecole de Géologie et d'Exploitation Minière

Epreuve de : Mathématiques
Durée : 3 h Session : 2011/2012

Exercice 1

I - On note z_1 et z_2 les racines de l'équation $z^2 + az + b = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

($|z_1| = |z_2| = 1$) si, et seulement si, ($|b| = 1$, $|a| \leq 2$ et $\arg b = 2 \arg a$)

II - Pour $a, b, c \in \mathbb{C}^*$, on considère les trois propriétés suivantes :

$$|a - b| = |b - c| = |a - c|$$

j ou j^2 est solution de $az^2 + bz + c = 0$, avec $j = \exp(i2\pi/3)$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

1°) Montrer que si $a = b$, chacune de ces propriétés implique $a = b = c$. Expliquer alors pourquoi on peut supposer a, b, c distincts deux à deux.

2°) Montrer que ces trois propriétés sont équivalentes (on pourra poser $u = (a - b)/(b - c)$).

III - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

N.B. : On écrira les solutions sous forme la plus simple possible.

Combien y a-t-il de solutions ? Pourrait-on s'y attendre ?

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, on définit $f_k : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, telle que $f_k(x) = \exp \{x^k \ln(x)\}$.

1°) Etudier la limite de f_k à la droite de $x = 0$. En déduire un prolongement F_k de f_k qui soit défini et continu sur $\mathbb{R}_+$. (On distinguera $k > 0$ et $k < 0$).

2°) Etudier la dérivabilité de F_k à la droite de $x = 0$. (On admettra pour cela que si φ est une application définie et continue sur $]0, 1]$, telle que la limite de $\varphi(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, $x > 0$ soit 0, alors les limites lorsque $x \rightarrow 0$, $x > 0$ de $[\exp(\varphi(x)) - 1]/x$ et de $\varphi(x)/x$ sont égales).

3°) Etudier les variations des fonctions F_k et construire les diverses formes de leurs représentations graphiques C_k dans un repère orthonormé d'unité 2, 5 cm. (On ne demande pas de chercher les points d'inflexion, mais on précisera soigneusement la position des deux coordonnées x_i, y_i des extrema éventuels par rapport à 1 et $\alpha = \exp(-1) = 0,36$; par rapport à 1 et $\beta = \exp(-e^{-1}) = 0,69$, respectivement).

Exercice 3

N.B. : Les probabilités demandées seront données sous forme de fraction irréductibles. Dans un laboratoire, la cage contient 5 souris blanches et 15 souris grises.

1°) On prélève une souris au hasard, on note sa couleur et on le remet dans sa cage. Cette opération est effectuée 8 fois.

a) Quelle est la probabilité pour qu'on ait exactement deux souris blanches ?

b) Calculer le nombre minimum n de prélèvement à effectuer pour que la probabilité de prélever au moins une souris blanche soit supérieure ou égale à 0,95.

(N.B. : $\ln 2 = 0,62$, $\ln 3 = 1,10$, $\ln 5 = 1,61$).

c) Peut-on trouver un tel nombre n pour que l'évènement du b) soit certain ?

2°) On prélève cette fois-ci 8 souris d'un coup. Calculer la probabilité de l'évènement du 1°) a).

Exercice 4

N.B. : On ne demande pas de figure.

Soit dans un plan affine euclidien P un triangle équilatéral ABC dont la longueur d'un côté est a . On désigne par O le milieu du segment $[BC]$, par G le centre de gravité du triangle ABC et par O' le symétrique de G par rapport à O .

1°) Déterminer le barycentre des points G et O , respectivement affectés des coefficients -3 et 2. Quel est

l'ensemble E_1 des points M de P tels que $\| -3 \vec{MG} + 2 \vec{MO} \| = \| \vec{MO'} \|$?

2°) Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Comment choisir k pour que cet ensemble contienne le point G ?

3°) Démontrer que, pour tout M appartenant à P , $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + a^2$.

Déterminer l'ensemble E_3 des points M de P tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$.