Correction Maths 2012/2013

EPREUVE DE MATHS

Partie A

1) Déterminons une équation de la droite (AD)

Soit M (x,y)$\in (AD)$ alors det ($\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}$) $= 0$

$\begin{vmatrix} x-e \\ y \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -e \\ -e \end{vmatrix} \Rightarrow$ -xe$+e^2 + ye = 0$

Soit (AD) : y = x – e

2) Lecture graphique

a) f(1) = -1 ; $f'(1) = 0$

b) dressons le tableau de signe de f sur [0,5]
sur $[0, e]$ f(x)< 0 et sur $[e, 5]$ f(x)> 0

c) dressons le tableau de signe de f' sur [0,5]
sur [0,1[$f'(x) < 0$; sur]1,5] $f'(x) > 0$

d) déterminons les variations de F sur $]0, +\infty[$
$F' = f$, sur $[0, e[$ $F'(x) < 0$ et sur $]e, +\infty[$ $F'(x) > 0$

e) Encadrons l'aire par deux entiers consécutifs.
A=$\int_4^5 f(x)dx$ $u.a$
L'intégrale est l'aire du trapèze formée par les droites d'équations x= 4 et x=5 et la courbe.

Partie B

1. Soit la fonction f(x) = x(lnx-1)

a) Déterminons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(lnx - 1) = \lim_{x\to+\infty} x . \lim_{x\to+\infty} (lnx - 1) = +\infty$$

b) Soit h(x)=xlnx. Déterminons la limite de f en 0
$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} xlnx - x = 0$

2.

a) **Montrons que $f'(x) = xlnx$**
$f'(x) = lnx - 1 + 1 = lnx$

b) Étudions le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ déduisons le tableau de variation de f
Pour x $\in]0,1[$ $f'(x) < 0$
Pour x $\in]1, +\infty[$ $f'(x) > 0$

3. Montrons que H(x) est une primitive de h

a) H est une primitive si $H'(x) = h(x)$

$$H'(x) = xlnx + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = xlnx$$

b) **Déduisons une primitive F de f et calculons $\int_1^e f(x)dx$**

f(x)=h(x)-x $\Rightarrow F(x) = H(x) - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 lnx - \frac{3}{4}x^2$

$$\int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e = \frac{3 - e^2}{4}$$

60

c) **Calculons l'aire**

A= $\int_1^e f(x)dx\ u.a = 1,1u.a$ u.a= unité d'aire

Partie c

1.

a) Donnons les valeurs suivantes :

f(0)=4 ; la droite (CF) a pour équation y= 0,75x+3,75 et est la tangente à la courbe au point C donc $f'(1)$ est la pente donc $f'(1) = 0,75$

$f'(2)$ est la pente à la tangente en D qui est nulle donc $f'(2) = 0$

b) Donnons le signe de $f'(x)$ $[-2; 5]$

Sur $[-2; 0] \cup [2; 5]$ f est décroissante donc $f'(x) < 0$

Sur $[0; 2]$ f est croissante donc $f'(x) > 0$

c) Donnons le signe de f(x) sur $[-2; 5]$

Sur $[-2; 4]$ f(x) > 0 et sur $[4; 5]$ f(x) < 0

2. Considérons la fonction g définie par : g(x) = ln(f(x))
   a) Nous venons de montrer que f est positive sur $[-2; 4[$ et l fonction ln n'est définie que pour des valeurs positives donc g est définie sur $[-2; 4[$
   b) Calculons g(-2), g(0), g(2)
      g(-2)=ln(f(-2))=ln9 ; g(0)=ln(f(0))=ln4; g(2)=ln(f(2))=ln5
   c) Précisons le sens de variation de g
      $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ or f(x) est positive donc le sens de variation de g est le même que celui de f
   d) Déterminons$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \ln(f(4)) = +\infty$. La droite d'équation y=4 est asymptote horizontale à la courbe de g
   e) Dressons le tableau de variation de g

x	-2 0	2	4
$g'(x)$	-	+	-
g(x)	↘	↗	↘

PARTIE D

1. Soit la fonction f définie sur R par f(x)=x$(1 - e^x)$
   a) Déterminons le développement limité de f à l'ordre 4
      Le développement de e^x à *l'ordre 4 est* : $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

Donc le développement de f est $x(1-(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3))$

Soit f(x) à l'ordre 4 nous donne : $-x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{6}x^4$

b) Étudions les variations de f'

$f''(x)=-e^x(2+x) \quad f''(x)=0 \Rightarrow x=-2$

c) Etudions les branches infinies

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1-e^x=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-1x=\lim\limits_{x\to-\infty}-e^x=0$

Donc la droite d'équation y=x est une démi asymptote oblique en $-\infty$ à la courbe de f

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-e^x=-\infty$

La courbe admet une branche parabolique de direction oy en $+\infty$

Donnons la position de f par rapport à son asymptote

f(x)-y$=-xe^x \quad \forall x\in\,]-\infty;0[$ (f(x)-y)≥ 0 donc f est au dessus de l'asymptote

traçons la courbe de f

déterminons les points d'inflexions

ce soint des points qui annulent la dérivée seconde soit x= -2

d) Calculons l'aire A(α)

$A(\alpha)=\int_\lambda^0(f(x)-x)dx=\int_\lambda^0-xe^x dx=[(1-x)e^x]_\lambda^0$ après intégration par parties

$A(\alpha)=1-(1-\lambda)e^\lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty}A(\alpha)=1$

2. Soit la fonction g définie par g(x) = ln(coshx).

a) Déterminons le développement limité de g à l'ordre 4.

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$

$e^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$

$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$

$g(x)=\ln(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)$

b) Etudions les variations de g

$g'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=tanhx\,;\,g'(x)=0\Rightarrow e^{2x}-1=0\;soit\;x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$

	$-\infty$		0		$+\infty$
g		-		+	
g(x)		$\searrow$	0	$\nearrow$	

c) **Montrons que g admet deux asymptotes**

$g(x)=\ln(\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2})=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)=\ln(e^{2x}+1)-ln2-x$

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{2x}+1)}{x}-\frac{ln2}{x}-1=-1$

$$\lim_{x\to-\infty}(g(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}+1)-ln2=-ln2$$

La droite d'équation y= -x-ln2 est asymptote oblique en -∞

g(x)-y=ln$(e^{2x}+1)\geq 0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{2x}+1)}{x}-\frac{ln2}{x}-1=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}+1)-ln2=+\infty$$

La droite d'équation y= - x est asymptote à la courbe en +∞

g(x)-y=ln$(e^{2x}+1)-ln2=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)\geq 0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

3. Considérons la partie du plan limité par x∈ $[ln2,\mu]$,
   a) Déterminons le signe de $\varphi(x)$

   $\varphi'(x)=\frac{2e^{-4x}}{1+e^{-2x}}>0$

   $\varphi(0)=-0{,}31$ et $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ de ce qui précède $\varphi(x)<0$

PARTIE E

1. Considérons l'équation différentielle(E₁) $xy'-y=-x^2e^x$
   a) Résolvons (E_1)

   Équation homogène $xy'-y=0$ soit $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$

   $\leftrightarrow$in$|y|=ln|x|+c$ soit y = A$|x|$

   - Sur I_1 la solution homogène est y = -Ax

     Faisons varier A

     y'(x) = -A'(x)x-A(x) en remplaçant dans l'équation on a : A'(x)=e^x soit A(x) = e^x+B , B∈ R

     la solution générale est y(x) = -x(e^x+B)

     Sur I_2 la solution homogène est y = Ax, Faisons varier A on a :

     y'(x) = A'(x)x+A(x) en remplaçant dans l'équation on a : A'(x)=$-e^x$ soit A(x) $=-e^x+C$, C ∈ R

     la solution générale est y(x) = -x(e^x+D) D ∈ R

   b) Résolvons (E_1) sur R

2. Considérons l'équation différentielle(E_2) définie par :
   $(1+e^x)(1+e^{2x})y'+2e^{3x}y=\Psi(x)$
   f étant solution en dérivant f et en l'injectant on a :
   $\Psi(x)=$

63