CORRECTION MATHS TECHNICIEN SUPERIEURS

2011/2012

Exercice 1

1) Déterminons l'affixe z_0 du point G barycentre des points A_1, A_2, A_3 , A_4, A_5

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \alpha_3 z_{A_3} + \alpha_4 z_{A_4} + \alpha_5 z_{A_5}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5}$$

Après calcul on a : $z_0 = -\frac{2}{3}i$

2) Déterminons l'ensemble C des points M tel que :

$$\|\overrightarrow{MA_1}\|^2 - \|\overrightarrow{MA_2}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MA_3}\|^2 + 2\|\overrightarrow{MA_4}\|^2 + 3\|\overrightarrow{MA_5}\|^2 = 0$$

Introduisons le barycentre G_0 dans cette relation on a :

$(\overrightarrow{MG_o} \ + \vec{G}_0A_1 \ )^2 - (\overrightarrow{MG_o} \ + \vec{G}_0A_2 \ )^2 - 2(\overrightarrow{MG_o} \ + \vec{G}_0A_3 \ )^2 + 2(\overrightarrow{MG_o} \ + \vec{G}_0A_4 \ )^2 + 3(\overrightarrow{MG_o} \ + \vec{G}_0A_1 \ )^2$, après développement on a :

$$3\overrightarrow{MG_o}^2 = \left[\overline{G_0A_1}^2 - \overline{G_0A_2}^2 - 2\overline{G_0A_3}^2 + 2\overline{G_0A_4}^2 + 3\overline{G_0A_5}^2\right] = \frac{-192}{9}$$

C est l'ensemble vide.

Exercice 2

Calculons les intégrales suivantes :

1) I = $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ nous constatons que la fonction est impaire donc I = 0

2) I = $\int_0^1 x^2 \sin x \, dx$ en faisant deux intégrations par partie on a :

J = $-2+\cos 1 + 2\sin 1$

3) K= $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^r r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\, dx =$

Changeons de variable en posant : x = rcos t ; dx = -rsin t

Pour x = 0 , t = $\frac{\pi}{2}$ et pour x = r , t = 0 donc $K = \int_0^{\pi/2} r^2 \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t}$

$K = \int_0^{\pi/2} r^2 (\sin t)^2\, dt$ $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ après calcul on a : K = $\frac{\pi r^2}{4}$

4) L = $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin 2x(1 + \cos 2x)^3 dx$

$1+\cos 2x = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ainsi

L = $16\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cos^7 x dx$

Faisons une intégration par partie,

Posons u=x^2 ,u'=2x   et v'=sin $x\cos^7 x$, v= $-\frac{1}{8}\cos^8 x$

$L = 16\left[-\frac{1}{8}x^2\cos^8 x\right]_0^{\pi/2} + 4\int_0^{\pi/2} x\cos^8 x dx$

Linéarisons $\cos^8 x$

$\cos^8 x = \frac{1}{128}\cos 8x + \frac{1}{16}\cos 6x + \frac{7}{32}\cos 4x + \frac{7}{16}\cos 2x + \frac{35}{128}$

Faisons une deuxième intégration

u=x   u'=1 et   v'$=\cos^8 x$ v= $\frac{1}{1024}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin 6x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{7}{32}\sin 2x + \frac{35}{128}x$:   L = $4\left[x\left(\frac{1}{1024}\sin 8x + \frac{1}{96}\sin 6x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{7}{32}\sin 2x + \frac{35}{128}x\right)\right]_0^{\pi/2} +$

$4\left[\frac{1}{8192}\cos 8x + \frac{1}{576}\cos 6x + \frac{7}{512}\cos 4x + \frac{7}{64}\cos 2x + \frac{35}{256}x^2\right]_0^{\pi/2}$

Exercice 3

Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante :

63x + 112 y = 21

1) Déterminons le PGCD (63, 112)

   63 = 7*9 et 112= $2^4 * 7$ donc le PGCD (63, 112) = 7

2) Déduisons toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$

   9x + 16 y = 3

   Déterminons la solution particulière

   16=9*1+7 ; 9=7*1+2 ; 7= 2*3+1

   1=7-2*3=7-(9-7*1)*3=7(1+31 =7*4-9*3

   1=(16-9*1)*4 – 9*3=16*4-9*7

   3=16*12+9*(-21)

   D'où x= -21 et y= 12

   Les entiers 9 et 16 étant premiers entre eux, le théorème de bezout nous permet d'affirmer à priori que l'équation admet des solutions dans Z

   Résolution de (E)

   on a 9x+16y= 9*(-21)+16*12

   9(x+21)= -16(y-12)

   9 divise 9(x+21),donc aussi 16(y-12)

   Comme 9 est premier avec 16, il divise (y-12) (théorème de Gauss)

Donc on a nécessairement (y-12)=9k ($k\in\mathbb{Z}$), en reportant dans l'équation on a :

9(x+21)= -16*9k x= -16k – 21 et donc y= 9k+12

Exercice 4

Soit x un réel tel que : $|x| < 1$. On pose $S_n(x)$ =1+x+$x^2 + \cdots + x^{n-1}$ pour n$\in \mathbb{N}^*$

Montrons que $S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

$S_n(x)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison x donc $S_n(x) = 1\frac{1-x^{(n-1)+1}}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}$

Déterminons la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ car $|x| < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

Envisageons le calcul de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$

nx^{n-1} est la dérivé~~e~~ par rapport à x de x^n et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^2}$

Exercice 5

Soient X et Y deux caractères définies sur une population Ω tels que Y = aX+b

1. Montrons que $\bar{Y} = a\bar{X} + b$

Soient (x_i,n_i) et (y_i,n_i) la modalité et l'effectif de chaque caractère

$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum n_i y_i = \frac{1}{N}\sum n_i(ax_i + b)$

= a$(\frac{1}{N}\sum n_i x_i + b\frac{1}{N}\sum n_i$

= a$\bar{X}$+b car $\sum n_i = N$

2. Montrons que $\sigma_Y{}^2 = a^2\sigma_X{}^2$

   $\sigma_Y{}^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$

   $E(Y^2) = \frac{1}{N}\sum n_i y_i{}^2 = \frac{1}{N}[\sum n_i(a^2x_i{}^2 + b^2 + 2abx_i]$

$$= a^2 \frac{1}{N}\sum n_i {x_i}^2 + b^2 \frac{1}{N}\sum n_i + 2ab\frac{1}{N}\sum n_i x_i$$

$$= a^2\, E(X^2) + b^2 + 2abE(X) \quad (1)$$

$$(E(Y))^2 = a^2(E(X))^2 + b^2 + 2ab\, E(X) \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow a^2\, E(X^2) + b^2 + 2abE(X) - (a^2(E(X))^2 + b^2 + 2ab\, E(X))$$

$$= a^2(E(X^2) - (\, E(X))^2) = a^2 {\sigma_X}^2$$