REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UNIVERSITE DE DOUALA
FACULTE DE GENIE INDUSTRIEL

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION
UNIVERSITY OF DOUALA
INDUSTRIAL ENGINEERING FACULTY

CONCOURS D'ENTREE EN 3ème ANNEE FGI : TOUTES LICENCES CONFONDUES

CORRECTIONS MATHEMATIQUES 2011/2012

MATHS-FGI3-2013-NDJOY

EXERCICE1 : PROBABILITE

1) Déterminons la loi de probabilité du couple (X, Y)

L'ensemble des valeurs est $\{ (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq i \}$

$P(X=k,Y=j)=\frac{C_1^1}{C_n^1}\frac{C_1^1}{C_k^1}=\frac{1}{nk}$

2) Déterminons la loi de Y et calculons son espérance

L'ensemble des valeurs est $\{1,2,3,4,5,6,\ldots,n\}$

$P(Y=j)=\sum_{k=j}^{n} p(X=k,Y=j)=\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{nk}=\frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}$

$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} j\,p(Y=j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{k}$

1) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ssi

$p(X=i,Y=j)=p(X=i).p(Y=j)$ pour tout (i,j)

On a $p(X=k)=\sum_{i=1}^{k} p(X=k,Y=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{nk}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}$

$P(X=n,Y=n)=\frac{1}{n^2}$ $p(Y=n)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n^2}$

Donc $p(X=n).p(Y=n)=\frac{1}{n^3}\neq\frac{1}{n^2}$ par suite X et Y sont dépendantes

2) Calculons $p(X=Y)$

X=Y est l'évènement tiré la boite numéro k et dans cette boite on tire la boul
numéro k

Ainsi $p(X=Y)=p(X=k,Y=k)=\frac{1}{nk}$

EXERCICE2 : ALGEBRE

E=espace vectoriel de dimension n, U=endomorphisme non nul de E tel que

UoU=0 ;r=rang(U) P=dimension de Ker(U)

1-a)montrons que Im(U)C Ker(U).Soit b∈Im(U) ,alors il existe a∈E tel que

b=U(a) ;

Montrons que U(b)=0.

On a U(b)=U(U(a))=UoU(a)=0 donc b∈Ker(U) par suite Im(U) Ker(U)

b) Déduisons que r ≤n/2 et p≥n/2

on a E=Ker(U)+Im(U),donc n=p+r de plus

Im(U) C Ker(U) implique r≤p,donc r≤p et n=r+p

Implique n≥r+r c.-à-d. n≥2r par suite r≤n/2 ;

De même n=p+r et p≥r

Implique n≤p+p c.-à-d. n≤2p par suite p≥n/2

2-On suppose que n=2

a) Montrons que Im(U)=Ker(U).

Dans la question 1-a) on a montré que Im(U)C Ker(U).on a

dimE=dim(Ker(U))+dim(Im(U)) c-à-d 2=p+r or U est non identiquement nul ;

MATHS-FGI3-2013-NDJOYA

donc r≠0 et r≤2/2=1

donc r=1 par suite p=1 Im(U)⊂ Ker(U) etdim(Ker(U))=dim(Im(U)).D'ou Im(U)=Ker(U)

i- Soit i∈Im(U)et i≠o,U(j)=i Montrons que (i,j) est une base de E

comme nous sommes en dimension 2 et on a une famille 2 vecteurs,il suffit de montrer que (i,j) est libre ;c-à-d ai+bj=o implique a=b=0

on a ai+bj=0 implique a U(i)+bU(j)=0,

or i∈Im(U) implique

il existe x∈E tel que i=U(x) →U(i)=U(U(x))=UoU(x)=0

Donc bU(j)=o →bi=0→b=0 car i≠o

par suite ai=o car b=0,

donc a=0 <u>**d'où (i,j) est une base de E**</u>

Donnons la matrice de U dans la base (i,j)

On a U(i)=o et U(j)=i donc $M1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ **On suppose que n=3**

a) Montrons que r=1

on a r≤3/2 avec r entier naturel non nul ,car U non identiquement nul.

<u>**Donc r=1 dim(Ker(U))=n-r=3-1=2**</u>

b) Soit k∈Ker(U) et i=U(k) Montrons qu'il existe j∈Ker(U) non colinéaire à i

on a i=U(k)→U(i)=U(U(k))=UoU(k)=o donc i∈Ker(U) ;comme dim(Ker(U))=2,alors on peut toujours Montrons que (i,j,k) est une base de E

MATHS -FGI3-2013- NDJOY

Comme nous sommes en dimension 3 et on a une famille de 3 vecteurs, il suff montrer que cette famille est libre. C-à-d ai+bj+ck=0 => a=b=c=0

On a ai+bj+ck=0 => aU(i)+bU(j)+cU(k)=0 => ci=o car i,j∈Ker(U) et U(k)=I par suite c=0 car i≠o

Donc ai+bj=0 par suite a=b=0 car I n'est pas colinéaire à j .donc a=b=c .d'où (i,j,k) est une base de E.

Déterminons la matrice de u dans cette base

On a U(i)=U(j)=o et U(k)=i donc M2= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE3 : ANALYSE

Ω={ $(x, y) \in R x R / |x| > |y|$ }E= $\left\{f: \Omega \to R \text{ de classe } C^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right\}$

2-a) Déterminons $\Omega'=\varphi(\Omega)$ et montrons que c'est un ouvert de R^2

On a $\varphi(\alpha(x_1;y_1) + \beta(x_2;y_2)) = \alpha\varphi(x_1;y_1) + \beta\varphi(x_2;y_2)$ donc φ est linéaire ;ainsi

$\Omega'=\varphi(\Omega)=\text{im}\varphi=\{(x',y') \in R^2 \ni (x;y) \in \Omega; \varphi(x,y) = (x';y')\}$; $\varphi(x,y) = (x';y') \Rightarrow x=x'+$ et y=x'-y' or $(x;y) \in \Omega \Leftrightarrow |x|>|y| \Leftrightarrow |x'+y'|>|x'-y'| \Leftrightarrow (x'+y')^2 > (x'-y')^2 \Leftrightarrow x'y'>0 \Leftrightarrow x'$ et y' sont de même signe donc $\Omega'=]-\infty;0[\times]-\infty;0[\cup]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car Ω'est une réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^2$

c) *Montrons que φ est un difféomorphisme de classe C^2 de Ω sur Ω'*

Il suffit de montrer que φ est de classe C^2 ;φ est bijective de Ω sur Ω' ;φ^{-1} est de classe C^2 sur Ω'

i) φ est de classe C^2 sur Ω car ses composantes sont des polynômes

MATHS -FGI3-2013-NDJOY

ii)par définition $\varphi:\Omega$ sur Ω'est surjective car $\Omega'=\varphi(\Omega)$;$\varphi(x,y)=(0,0)$

$\Rightarrow x+y=0$ et $x-y=0 \Rightarrow x=y=0$ donc φ est injective

Par suite φ réalise une bijection de Ω sur Ω'

iii)$\varphi(x,y)=(a\,;b) \Rightarrow x+y=2a$ et $x-y=2b \Rightarrow x=a+b$ et $y=a-b$ donc $\varphi^{-1}(x,y)=\phi(x,y)=(x+y,x-y)$; φ^{-1} est de classe C^2 sur Ω' car ses composantes sont des polynômes ;i),ii) et iii)$\Rightarrow\varphi$ est un difféomorphisme de classe C^2 de Ω et $\phi(x,y)=(x+y,x-y)$

3) $g=f\circ\phi$ est de classe C^2 sur Ω' car ϕ est de classe C^2 sur Ω' et f est de classe C^2 sur $\Omega=\phi(\Omega')$;

On a $g(x,y)=f\circ\phi\,(x,y)=f(x+y\,;x-y)$, $\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x+y;x-y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x+y;x-y)}{\partial y}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f(x+y;x-y)}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-(x-y)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{xy}}$

4) $h(u\,;v)=\sqrt{uv}$; calculons $\frac{\partial^2 k}{\partial u\partial v}$;

on a $\frac{\partial^2 k(u;v)}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 g(u;v)}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 k(u;v)}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2\sqrt{uv}}-\frac{1}{4\sqrt{uv}}=\frac{1}{4\sqrt{uv}}$

5) Déduisons l'ensemble des solutions de (1)

$k=g-h \Rightarrow g=k+h$ *;on a* $\frac{\partial^2 k}{\partial u\partial v}=\frac{1}{4\sqrt{uv}} \Rightarrow k(u,v)=\sqrt{uv}+F(u)+G(v)$;

avec F et G de classe C^2 *sur* Ω' *or* $g=f\circ\phi \Rightarrow g\circ\varphi=f\circ\phi\circ\varphi \Rightarrow f=g\circ\varphi$ *;donc*

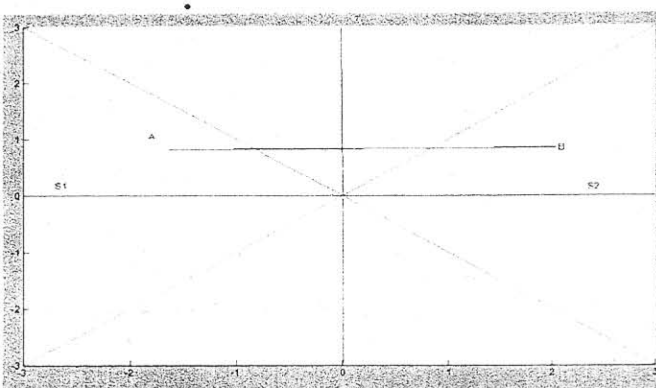
$f(u,v)=g\circ\varphi(u,v)=g(\frac{u+v}{2};\frac{u-v}{2})=2\sqrt{(\frac{u+v}{2})(\frac{u-v}{2})}+F(\frac{u+v}{2})+G(\frac{u-v}{2})$

Donc $f(u,v)=\sqrt{(u^2-v^2)}+F(\frac{u+v}{2})+G(\frac{u-v}{2})$ avec F et G de classe C^2 sur Ω

MATHS-FGI3-2013-NDJOY

1)Ω=S1US2 ;Ω est ouvert car S1 et S2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$

Ω n'est pas convexe car A ,B$\in\Omega$ mais le segment [A ;B] n'est pas entièrement contenu dans Ω (FIGURE)



<u>EXERCICE4</u> : ANALYSE

J :$R^N \to$R ,X$\to \frac{1}{2}\|AX-b\|^2$

1) montrons que J est positif et convexe

Pour tout X$\in R^N$ J(X)=$\frac{1}{2}\|AX-b\|^2 \geq 0$ donc J est positive. Soient X,Y $\in R^N$ et t$\in[0;1]$ montrons que

J(tX+(1-t)Y)$\leq$tJ(X)+(1-t)J(Y) on a

J(tX+(1-t)Y)= $\frac{1}{2}\|A(tX+(1-t)Y)-b\|^2$= $\frac{1}{2}\|tAX+(1-t)AY-tb-(1-t)b\|^2$

car b=tb+(1-t)b

J(tX+(1-t)Y)= $\frac{1}{2}\|t(AX-b)+(1-t)(AY-b)\|^2 \leq \frac{1}{2}(t\|AX-b\|+(1-t)\|AY-b\|)^2$

J(tX+(1-t)Y)$\leq\frac{1}{2}$($t^2\|AX-b\|^2$+2t(1-t) $\|AX-b\|\|AY-b\|$+$(1-t)^2\|AY-b\|^2$)

Posons

g(t)= $tJ(X)+(1-t)J(Y)$ $-\frac{1}{2}(t^2\|AX-b\|^2+2t(1-t)\|AX-b\|\|AY-b\|+(1-t)^2\|AY-b\|^2)$

g est continue et plusieurs fois dérivable sur $[0;1]$

$g'(t)= J(X)-J(Y)\ -\frac{1}{2}(2t\|AX-b\|^2+2(1-2t)\|AX-b\|\|AY-b\|-2(1-t)\|AY-b\|^2)$

$g''(t)= -\frac{1}{2}(2\|AX-b\|^2-4\|AX-b\|\|AY-b\|+2\|AY-b\|^2)$

$=-(\|AX-b\|-\|AY-b\|)^2\leq 0$ *donc g' est décroissante*

$g'(0)=\frac{1}{2}(\|AX-b\|-\|AY-b\|)^2\geq 0$ $g'(1)=-(J(X)+J(Y)+\|AX-b\|\|AY-b\|)\leq 0$ comme $g'(0)g'(1)\leq 0$ g' continue sur $[0;1]$ alors il existe $\alpha\in[0;1]$ *tel que* $g'(\alpha)=0$.

pour $t\in]0;\alpha[$ $g'(t)>0$ donc g est croissante sur $]0;\alpha[$ et pour $t\in]\alpha;1[$ $g'(t)<0$ donc g est décroissante sur $]\alpha;1[$

on a $g(0)=0$ et $g(1)=0$ donc pour tout $t\in[0;1]$ $g(t)\geq 0$ d'où $J(tx+(1-t)y)\leq tJ(x)+(1-t)J(y)$

Pour tout $t\in[0;1]$ *par suite J convexe*

2) Montrons que le point stationnaire de J est solution de l'équation AX=b

On a $J'(X)=\|AX-b\|\frac{d}{dX}\|AX-b\|$, notons par $\langle,\rangle$ le produit scalaire associé à $\|,\|$

$F: R^N\to R^N\times R^N$ $\quad G: R^N\times R^N\to R$ $\quad W:]0;+\infty[\to R$

$x\to(AX-b,AX-b)$ $\quad (X,Y)\to\langle X,Y\rangle$ $\quad t\to\sqrt{t}$ on a $\|AX-b\|=WoGoF(x)$

F est différentiable en x et $F'(X)h=(Ah,Ah)$;

G est différentiable en (AX-b,AX-b) et

MATHS-FGI3-2013-NDJOY

G'(AX-b,AX-b)(Ah,Ah)=2 $\langle AX-b, Ah\rangle$;

W est differentiable en $\langle AX-b, AX-b\rangle$ et

W'($(\langle AX-b, AX-b\rangle)$(2 $\langle AX-b, Ah\rangle$)=$\frac{\langle AX-b,Ah\rangle}{\|AX-b\|}$

$\frac{d}{dX}\|AX-b\|h$ =W'(GoF(x)).(GoF)'(X)h=$\frac{\langle AX-b,Ah\rangle}{\|AX-b\|}$ par suite J'(X)h=$\langle AX-b, Ah\rangle$

J'(x)h=0 pour tout h∈$\mathbb{R}^N$ →AX-b=o donc AX=b

3) Montrons que le point stationnaire de J est un minimum

Soit X le point stationnaire de J,alors AX=b c-à-d AX-b=o donc $\|AX-b\|$=0 par suite J(X)=0 or J est positive ;donc le point stationnaire de J est un minimum

4)soit $X^0 \in R^M$,montrons que pour tout h $\in R^M$ avec h=J'(X^0),

on peut trouver X^1=$X^0-\rho h$ tel que J(X^1)<J(X^0)

Si J'(X^0)=0, prendre X^1=X^0

Sinon w=- J'(X^0) est une direction de descente en X^0 , c-à-d qu'il existe α>0 tel que J($X^0+\rho w$)< J(X^n)

pour tout ρ∈]0;α[c-à-d J($X^0-\rho h$)≤ J(X^0) pour tout ρ∈]0;α[

J étant continue et non constante, il existe $\rho_1 \in$]0;α[tel que J($X^0-\rho_1 h$)< J(X^0)

On a J(X^n)<J(X^{n-1}) donc la suite numérique J(X^n) est décroissante

Ainsi J(X^n)< J(X^0) →$\|AX^n-b\|$<$\|AX^0-b\|$ →$\|AX^n\|-\|b\|$<$\|AX^0-b\|$ →

$\|AX^n\|$<$\|AX^0-b\|+\|b\|$ →$\|AX^n\|$<+∞→$\|X^n\|$< +∞ par suite la suite X^n est bornée

Comme la suite numérique J(X^n) est décroissante et minorée(J est minorée)

alors la suite J(X^n) converge donc il existe une sous-suite X^{np} de X^n qui

MATHS-FGI3-2013-NDJOY

converge supposons que X^{np} converge vers y

Montrons que toutes les sous-suites de X^n convergent vers y. par l'absurde supposons qu'il existe une sous-suite X^{np} de X^n qui ne converge pas vers y, alors il existe ε_0 >0 tel que pour tout p il existe N_p>p et $\|X^{np} - y\| > \varepsilon_0$

De même il existe une sous suite X^{npj} de X^{np} qui converge vers y ,alors pour $\varepsilon=\varepsilon_0$ pour tout j ,il existe N_{pj},tel que N_{pj} ≥j et $\|X^{npj} - y\| > \varepsilon_0$ or la convergence de la suite X^{npj} vers y implique pour $\varepsilon= \varepsilon_0$ qu'il existe j_{ε_0} tel que j≥ j_{ε_0}

implique $\|X^{npj} - y\| < \varepsilon_0$ en choisissant un j tel que N_{pj} ≥j et j≥j_{ε_0}

On a $\|X^{npj} - y\| > \varepsilon_0$ et $\|X^{npj} - y\| < \varepsilon_0$ ce qui est absurde .

Donc toutes les sous-suites de X^n convergent vers y et par suite X^n converge vers y.

6) Caractérisons cette limite

On a $J(X^n) < J(X^{n-1}) < \ldots < J(X^0)$ donc $J(y) \leq J(X^n)$ donc y est le point stationnaire de J, Ay=b

EXERCICE 5 : ANALYSE

5) soit X=0.234234234234234...234

Comparons X et 100X :on a

100X=234.234234234234...234=234+0.234234234...234=234+X

Donc 100X=234+X

Ecrivons X sous forme d'une fraction rationnelle

MATHS-FGI3-2013-NDJOY

On a : $100X=234+X \rightarrow 99X=234 \rightarrow X=\frac{234}{99}$

6) Montrons que l'ensemble $A=\left\{\frac{n-1}{n+1}\ \text{avec n entier naturel non nul}\right\}$ *est borné*

On a n-1<n+1 donc $\frac{n-1}{n+1}<1$ et $\frac{n-1}{n+1}\geq 0$ d'où A est borné et i

nf$A$=min$A$=0 ;

sup$A$=1

MATHS -FGI3-2013-NDJOY